Etude linéaire des solutions d'une équation différentielle

L'objectif de ce problème est de résoudre l'équation différentielle :

$$y^{(4)}+2y^{(2)}+y=0$$

F désigne l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Questions préliminaires :

a. Soit Δ l'application, définie sur F, qui à une fonction f associe sa dérivée f'.
Montrer que Δ est un endomorphisme de F. Est-ce un automorphisme ?

b. Soit y une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y^{(4)}+2y^{(2)}+y=0$.
Montrer que y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On considère le sous-ensemble E de F constitué des fonctions de la forme :

$$x\mapsto(ax+b)\sin x+(cx+d)\cos x \text{ avec } a,b,c,d \text{ réels quelconques.}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de F de base $\mathcal{B}=(f_1,f_2,f_3,f_4)$ où $f_1:x\mapsto\sin x$, $f_2:x\mapsto x\sin x$, $f_3:x\mapsto\cos x$ et $f_4:x\mapsto x\cos x$.

2. D désigne la restriction de Δ au départ de E.

2.a Montrer que D est un endomorphisme de E et calculer les images par D des fonctions constituant la base $\mathcal{B}$.

2.b Déterminer $\ker D$. En déduire que D est une bijection de E vers E.

3. Id_E désigne l'application identité de E.

3.a Déterminer une base et la dimension du noyau et de l'image de $D^2+\mathrm{Id}_E$.

3.b En déduire que $D^4+2D^2+\mathrm{Id}_E$ est l'application nulle de E.

3.c Retrouver ainsi que D est bijective et calculer D^{-1} en fonction de D.

4. On note V le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par Id_E et D^2.

4.a Justifier que la famille (Id_E,D^2) est une base de V.

4.b Vérifier que V est stable pour le produit de composition des applications.

4.c Soit M l'application qui à $\varphi=\alpha\,\mathrm{Id}_E+\beta D^2\in V$ associe $M(\varphi)=\alpha-\beta$.
Montrer que M est une forme linéaire sur V et que pour tout $\varphi,\psi\in V$, $M(\varphi\circ\psi)=M(\varphi)M(\psi)$.

5.a Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y''+y=0$.

5.b Déterminer le noyau de $\Delta^2+\mathrm{Id}_F$.

5.c Montrer que le noyau de $(\Delta^2+\mathrm{Id}_F)^2$ est E puis que E est exactement l'espace des solutions de l'équation différentielle $y^{(4)}+2y^{(2)}+y=0$.