DÉRIVABILITÉ

Exercice 1 :

Sur quelles parties de $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes sont-elles dérivables ?

1) $f : x \mapsto x|x|$, 2) $g : x \mapsto \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}$, 3) $h : x \mapsto \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}$

Exercice 2 :

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Définition :

On dit que f possède une dérivée symétrique en 0 si et seulement si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(-h)}{2h}$ *existe et est finie.*

1) Supposons que f est dérivable en 0. Montrer que f possède une dérivée symétrique en 0 , et calculer-la.
2) Si f possède une dérivée symétrique en 0 , f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 3 :

A) Dériver les fonctions suivantes (*on ne demande pas de déterminer le domaine de dérivabilité*).
   1) $f(x) = \frac{3x\ln x+1}{2x\ln x+3}$, **2)** $g(x) = \sin\left(f(x^2)\right)$, **3)** $g(x) = (\sin(f(x)))^2$

B)

Exercice 4 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dérivable en a. Calculer $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{xf(a) - af(x)}{x - a}$.

Exercice 5 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la dérivée $n^{ème}$ de chacune des fonctions suivantes :

$$1)\ f(x) = \frac{1}{1+x}\ ,\ 2)\ g(x) = \frac{1}{1-x}\ ,\ 3)\ h(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Exercice 6 :

Calculer la dérivée $n^{ème}$ de chacune des fonctions suivantes :

$$1)\ f(x) = (\cos x)^3\ ,\ 2)\ g(x) = \sin(x)e^x\ ,\ 3)\ h(x) = x^2(1+x)^n$$

Exercice 7 :

1) Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $f(x) = \sin(x)e^{x\sqrt{3}}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)$$

et ce via les trois méthodes suivantes :

i) Par récurrence.

ii) Via la formule de Leibniz.

iii) Via une fonction complexe.

2) Soit maintenant $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $g(x) = \sin(x)e^x$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $g^{(n)}(x)$ via la formule de Leibniz et via une fonction complexe.

Exercice 8 :

Soit $\in \mathbb{N}$.

1) Ecrire la dérivée $n^{ème}$ de la fonction $x \mapsto x^{2n}$.

2) Recalculer cette dérivée $n^{ème}$, mais cette fois-ci via Leibniz, tout en écrivant $x^{2n} = x^n \cdot x^n$.

3) En déduire l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

Exercice 9 :

Déterminer toutes fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Exercice 10 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f' ne s'annule pas.
Montrer alors que f ne peut pas être périodique.

Exercice 11 :

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\exists x \in]0,1[\ ,\ 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$$

Exercice 12 :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a < b$ deux réels. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ n fois dérivable.
Supposons que $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ et que $f(b) = 0$.
Montrer alors que

$$\exists c \in]a,b[\ ,\ f^{(n)}(c) = 0$$

Exercice 13 :

Soient f *et* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivables. Supposons que $\forall x \in [a,b],\ g'(x) \neq 0$.

1) Justifier que $g(a) \neq g(b)$.

2) Montrer que

$$\exists c \in]a,b[,\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Exercice 14 :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que

$$\forall x > 0,\ \exists c > 0,\ f(x) - f(-x) = x\left(f'(c) + f'(-c)\right)$$

Exercice 15 :

A l'aide du TAF :

1) Montrer que

$$\forall x > 0,\ \frac{1}{1+x} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right)$

Exercice 15 :

Montrer les inégalités suivantes :

1) $\forall x \in]-1,+\infty[\ ,\ \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$

2) $\forall x \in \mathbb{R}^+\ ,\ e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$

Exercice 16 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Soit $f \in \mathcal{C}^2\left([a, a+2h], \mathbb{R}\right)$.
Montrer que

$$\exists c \in]a, a+2h[\ ,\ f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = h^2 f"(c)$$

<u>*Indication :*</u> *Vous pouvez introduire la fonction* $\varphi(x) = f(x+h) - f(x)$.

Exercice 17 :

Soient $a < b \in \mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}^1\left([a,b], \mathbb{R}\right)$.
Montrer que f est lipschitzienne.

Exercice 18 :

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x)\ si\ x \neq 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 19 :

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \; si \; x \neq 0 \\ 0 \; si \; x = 0 \end{cases}$.

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = 0$.

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 20 :

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} \; si \; x < 0 \\ 0 \; sinon \end{cases}$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Etudier l'existence de $f''(0)$.

3) On se propose de montrer que la dérivée $n^{ème}$ de f sur $]-\infty, 0[$ est de la forme $f^{(n)}(x) = e^{\frac{1}{x}} x^{-2n} P_n(x)$; où P_n est une fonction polynomiale.
   i) Déterminer $P_1(x)$ et $P_2(x)$.
   ii) Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P_n', pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 21 :

Pour chaque $n \succeq 2$, on note $f_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \; , \; f_n(x) = x - \cos\left(\frac{x}{n}\right)$$

1) Montrer que
$$\forall n \succeq 2, \; \exists! x_n \in]0, 1[, \; x_n = \cos\left(\frac{x_n}{n}\right)$$

2) i) Montrer que
$$\forall x \in]0, 1[, \; \forall n \succeq 2, \; f_n(x) \succ f_{n+1}(x)$$
   ii) En déduire que la suite $(x_n)_{n \succeq 2}$ est croissante.

3) Etudier enfin la convergence de la suite $(x_n)_{n \succeq 2}$.