Partitions usuelles de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

1) $(\mathbb{N}\times\{n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

2) $(\{n\}\times\mathbb{N})_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

3) $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

où $I_n=\{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \,/\, i+j=n\}$

I_0	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$\cdots$
I_1	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$\cdots$
I_2	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$		
I_n	$(n,0)$	$(n,1)$	$\cdots$	

$$\begin{cases} \forall n\neq n',\ I_n\cap I_{n'}=\emptyset \\ \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} I_n=\mathbb{N}\times\mathbb{N} \end{cases}$$

$I_n=\{(n,k)\,/\,k\in\mathbb{N}\}=\{n\}\times\mathbb{N}$

1) $(\mathbb{N}\times\{n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

2) $(\{n\}\times\mathbb{N})_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

3) $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

où $I_n = \{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \,/\, i+j=n\}$

$I_0 \quad I_1 \quad I_2 \quad I_3 \quad \dots$

$$\begin{array}{ccccc}
(0,0) & (0,1) & (0,2) & (0,3) & \dots \\
(1,0) & (1,1) & (1,2) & (1,3) & \dots \\
(2,0) & (2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots \\
(3,0) & (3,1) & (3,2) & (3,3) & \dots
\end{array}$$

$I_n = \{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \,/\, i+j=n\}$

$$\begin{cases} \forall n\neq n',\ I_n \cap I_{n'} = \emptyset \\ \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = \mathbb{N}\times\mathbb{N} \end{cases}$$

2) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{mn} = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{mn}\right)}$$

Au Sup

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)$$

ressemble à

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

Réflexe à avoir

Pr. ELAMIRI

Cours dis

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

Réflexe à avoir

Exercice d'application

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$.

Mq que la série $\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n$ est ACV et préciser sa somme.

Exercice d'application

Déterminer tous les réels α tels que la suite double

$$\left(\frac{1}{(m+n)^{\alpha}}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$$

soit sommable.

Pr. ELAMIRI