

---

**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP**

---

**MATHÉMATIQUES 1**

**Lundi 29 avril : 14 h - 18 h**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

---

**Les calculatrices sont interdites**

**Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.**

## EXERCICE I

On admet que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  et on pose, pour  $t \in ]0, +\infty[$ ,  $f(t) = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$ .

- Q1.** Justifier que la fonction  $f$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  puis, à l'aide d'un théorème d'intégration terme à terme, calculer l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$ .

## EXERCICE II

Si  $X$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  de loi de probabilité donnée par :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n = P(X = n)$ , la fonction génératrice de  $X$  est  $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$ .

- Q2.** Démontrer que l'intervalle  $] -1, 1[$  est inclus dans l'ensemble de définition de la fonction  $G_X$ .

Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

On pose  $S = X_1 + X_2$ , démontrer que pour tout  $t \in ] -1, 1[$ ,  $G_S(t) = G_{X_1}(t) \cdot G_{X_2}(t)$  par deux méthodes : l'une utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières et l'autre utilisant uniquement la définition :  $G_X(t) = E(t^X)$ .

On généralise ce résultat, que l'on pourra utiliser dans la question suivante, à  $n$  variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$  (on ne demande pas de preuve de cette récurrence).

- Q3.** Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.  
On effectue  $n$  tirages d'une boule avec remise et on note  $S_n$  la somme des numéros tirés.  
Déterminer pour tout  $t \in ] -1, 1[$ ,  $G_{S_n}(t)$  et en déduire la loi de  $S_n$ .

## PROBLÈME

### Introduction

Dans ce sujet une série de fonctions  $L_a$  est une série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$  où  $(a_n)_{n \geq 1}$  est une suite de réels telle que la série entière  $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$  soit de rayon 1.

### Partie I - Propriétés

Soit une série de fonctions  $L_a : \sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ .

**Q4.** Si  $x \in ]-1, 1[$ , donner un équivalent de  $1-x^n$  pour  $n$  au voisinage de  $+\infty$ .

Démontrer que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , la série  $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$  converge absolument.

Remarque : la série  $L_a$  peut parfois converger en dehors de l'intervalle  $]-1, 1[$ . Donner un exemple de suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  telle que la série  $L_a$  converge en au moins un  $x_0$  n'appartenant pas à l'intervalle  $]-1, 1[$ .

**Q5.** Démontrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$  converge uniformément sur tout segment  $[-b, b]$  inclus dans l'intervalle  $]-1, 1[$ .

**Q6.** On pose, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ .

Justifier que la fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $]-1, 1[$  et démontrer ensuite que la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur l'intervalle  $]-1, 1[$ . Donner la valeur de  $f'(0)$ .

**Q7.** Expression sous forme de série entière

On note  $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ .

Lorsque  $(u_{n,p})_{(n,p) \in A}$  est une famille sommable de réels, justifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{(k,p) \in I_n} u_{k,p} \right), \text{ où } I_n = \{(k,p) \in A, kp = n\}.$$

Démontrer que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , la famille  $(a_n x^{np})_{(n,p) \in A}$  est sommable.

En déduire que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$  où  $b_n = \sum_{d|n} a_d$

( $d|n$  signifiant  $d$  divise  $n$ ).

## Partie II - Exemples

**Q8.** Dans cette question, pour  $n \geq 1$ ,  $a_n = 1$  et on note  $d_n$  le nombre de diviseurs de  $n$ . Exprimer,

pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$  comme la somme d'une série entière.

**Q9.** Dans cette question, pour  $n \geq 1$ ,  $a_n = \varphi(n)$  où  $\varphi(n)$  est le nombre d'entiers naturels premiers avec  $n$  et inférieurs à  $n$ .

Justifier que la série entière  $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$  est de rayon 1.

On admet que pour  $n \geq 1$ ,  $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ . Vérifier ce résultat pour  $n = 12$ .

Pour  $x \in ]-1, 1[$ , exprimer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n}$  sous la forme d'un quotient de deux polynômes.

**Q10.** En utilisant le théorème de la double limite, établir à l'aide du développement en série entière

de la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$  sur l'intervalle  $]-1, 1[$ , la valeur de la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ .

**Q11.** Dans cette question et la suivante, pour  $n \geq 1$ ,  $a_n = (-1)^n$  et pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}.$$

En utilisant le théorème de la double limite, calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  et donner un équivalent de  $f(x)$  au voisinage de 0. Retrouver le dernier résultat de la question **Q6**.

**Q12.** Démontrer qu'au voisinage de 1,  $f(x) \sim \frac{-\ln 2}{1-x}$ .

On pourra remarquer que pour  $x \in ]0, 1[$ ,  $\frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}$ .

FIN