$A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

1) $\begin{pmatrix} AB = 0 \\ A \neq 0 \end{pmatrix} \not\Longrightarrow B = 0$

erreur

2) $\begin{pmatrix} AB = 0 \\ A \text{ inversible} \end{pmatrix} \Longrightarrow B = 0$

Correct

$\left(AB = 0 \Longrightarrow \underbrace{A^{-1}(AB)}_{I_n} = 0 \Longrightarrow B = 0 \right)$

$n \in \mathbb{N}^*$

$(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, +, \times)$ est-il en général intègre ?

Rép :

NON

C/ex :

$(\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}, +, \times)$ n'est pas intègre car :

$$\begin{cases} \bar{2} \times \bar{3} = \bar{0} \\ \text{Mais } \bar{2} \neq \bar{0} \text{ et } \bar{3} \neq \bar{0} \end{cases}$$

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ est-il un corps ?

<u>Rép</u> : Non, car $\begin{cases} 2 \neq 0 \\ 2 \text{ n'est pas } \underline{\text{inversible}} \end{cases}$

$2 \times \frac{1}{2} = 1$

$\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

$A, B \in M_p(\mathbb{K})$.

$(AB)^2 = A^2 B^2$ Si $AB = BA$.

<u>En fait</u>

$(AB)^2 = AB \cdot AB$

$= AB$

$= A \cdot A \cdot B \cdot B$

$= A^2 \cdot B^2$

Scanned with CamScanner

$A, B \in M_p(\mathbb{K})$.

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \quad (\text{Si } AB = BA)$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - \underbrace{AB + BA}_{=0} - B^2$$

$$= A^2 - B^2 \qquad \square$$

$(A,+,\times)$ un anneau.

$\hookrightarrow$ a inversible $\Longleftrightarrow \exists b \in A,\ \begin{cases} a\times b = 1 \\ b\times a = 1 \end{cases}$

$\rightarrow$ L'ensemble des éléments inversibles de A se note $\mathcal{U}(A)$ ou $A^{\times}$.

S!

$\rightarrow$ $(\mathcal{U}(A), \times)$ est un groupe.
(c'est le groupe unité de A)

Exemple :

1) $\mathcal{U}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{\times} = \{-1,1\}$

2) $(\{-1,1\},\times)$ groupe.

$\{-1,1\} = \langle -1 \rangle$

OK ?

$\{-1,1\} = \langle -1 \rangle$

Car:

$\langle -1 \rangle = \{(-1)^k / k \in \mathbb{Z}\}$

$= \{-1, 1\}$

$(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times)$. Donner deux fonctions convenables.en exo chez-vous

n'est pas intègre

f ·

Très classique

Exercice : Soit a un élément nilpotent d'indice $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(1-a)$ est inversible et préciser $(1-a)^{-1}$ en fonction des puissances de a.

Très classique

Exercice : Soit a un élément nilpotent d'indice $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(1-a)$ est inversible et préciser $(1-a)^{-1}$ en fonction des puissances de a.

$a^n = 0$.

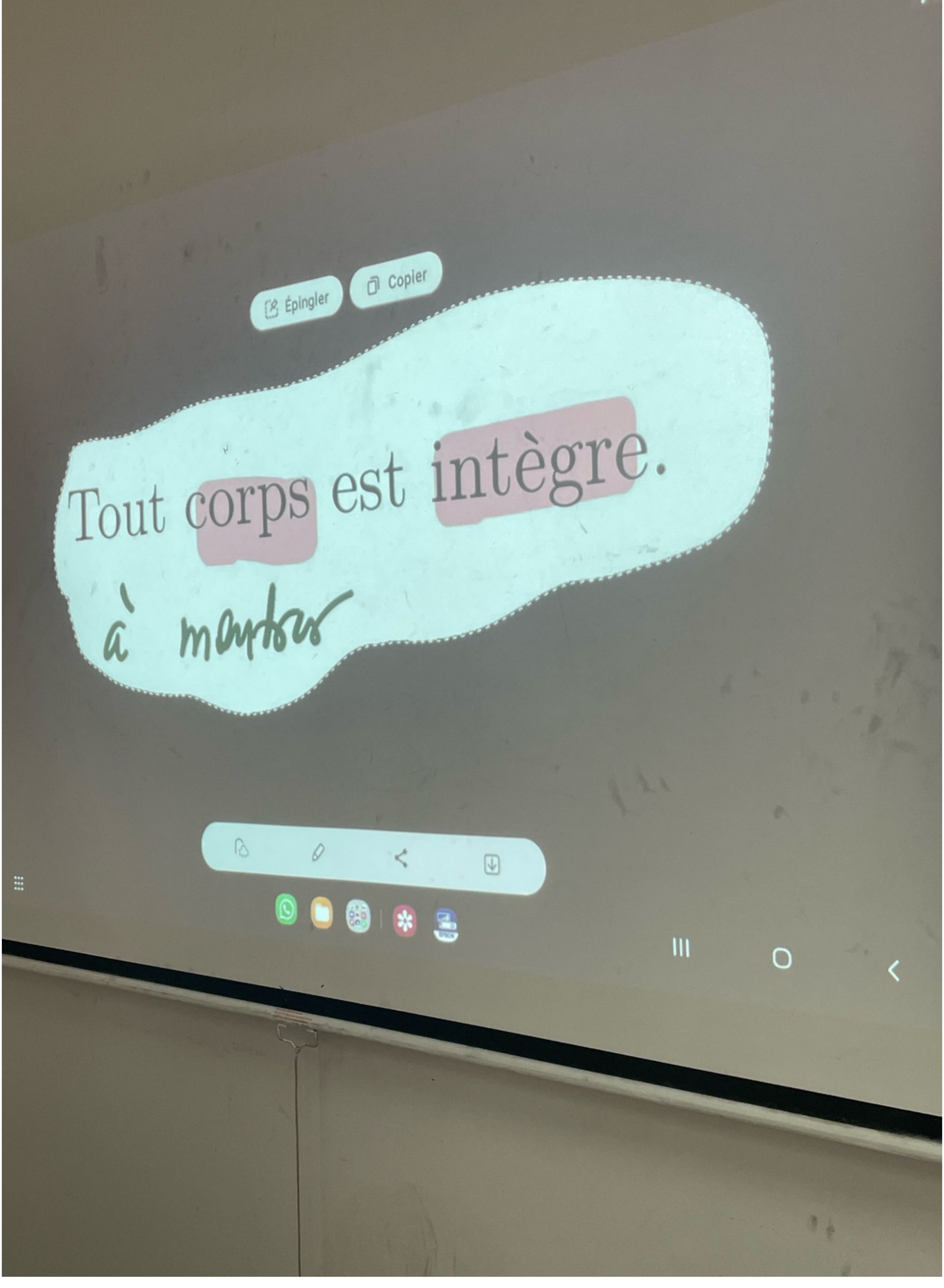
$$\boxed{1} = 1 - a^n = 1^n - a^n = (1-a)\boxed{(1+a+\dots+a^{n-1})}$$

Bernoulli

car $1 \cdot a = a \cdot 1$ $(-a)$

et de m : $1 = (1+a+\dots+a^{n-1}) \cdot (1-a)$

D'où ... etc.


Épingler
Copier
Tout corps est intègre.
à montrer

Dém : K est un corps :

Soit a et b ∈ K tq $ab=0$

Mq : $a=0$ ou $b=0$

Par l'absurde on suppose $a\neq 0$ et $b\neq 0$

a est inversible car K corps

Ainsi : $ab=0 \Rightarrow \underbrace{a^{-1}a}_{1}b=0$ $\Rightarrow a\neq 0$

$\Rightarrow b=0$ absurde car $b\neq 0$

Prop : Un sous-anneau est à son tour un anneau.

Exercice d'application : Les ensembles suivants sont-ils des anneaux ?

1) L'ensemble des suites réelles convergentes.
2) L'ensemble des suites réelles convergentes vers zéro.
3) $2\mathbb{Z}$

à travailler