Equation fonctionnelle

L'objectif de ce problème est la détermination des applications $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

(1) $\forall x,y\in\mathbb{R}^+, f(x+y)\geq f(x)+f(y)$ (on dit que f est sur-additive),

(2) $\forall x,y\in\mathbb{R}^+, f(xy)=f(x)f(y)$ (on dit que f est multiplicative).

Partie I : Un exemple

Soit α un réel supérieur ou égal à 1.

1. Montrer que pour tout réel $x\geq 0$, $(1+x)^\alpha\geq 1+\alpha x$.
2. En déduire que pour tout $x,y\geq 0$, $(x+y)^\alpha\geq x^\alpha+y^\alpha$.
3. On considère la fonction $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^\alpha$.
   Justifier que f est solution du problème posé.

Partie II : Quelques propriétés

1. Quelles sont les fonctions constantes solutions du problème étudié ?

Désormais f désigne une fonction non constante solution du problème étudié.

2. Montrer que $f(0)=0$, $f(1)=1$.

3.a Etablir : $\forall x\in\mathbb{R}^+,\forall n\in\mathbb{N}, f(x^n)=f(x)^n$.

3.b Etablir aussi : $\forall x\in\mathbb{R}^+, x\neq 0\Rightarrow f(x)\neq 0$ et $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{f(x)}$.

3.c Etablir enfin : $\forall x\in\mathbb{R}^+, x>0\Rightarrow f(x)>0$.

4. Montrer que f est croissante.

Partie III : Détermination des solutions

A nouveau f désigne une fonction non constante solution du problème étudié.

1. Etablir que $\ln f(2)$ est bien défini et que $\ln f(2)\geq \ln 2$.
2. Justifier : $\forall x>0,\exists! q\in\mathbb{Z}$ tel que $2^q\leq x<2^{q+1}$.
3. Soit un réel $x>0$ et p un entier naturel.
   On convient de noter q_p l'unique entier tel que $2^{q_p}\leq x^p<2^{q_p+1}$.

3.a Déterminer la limite du rapport q_p/p quand p tend vers $+\infty$.

3.b En observant l'encadrement $f(2)^{q_p}\leq f(x)^p\leq f(2)^{q_p+1}$,

justifier : $\dfrac{q_p}{p}\leq\dfrac{\ln f(x)}{\ln f(2)}\leq\dfrac{q_p+1}{p}$.

3.c En déduire que $\dfrac{\ln f(x)}{\ln x}=\dfrac{\ln f(2)}{\ln 2}$.

4. On pose $\alpha=\dfrac{\ln f(2)}{\ln 2}\geq 1$.

   Justifier que pour tout réel $x\geq 0$, $f(x)=x^\alpha$.

Correction

Partie I

Pour commencer, rappelons que la fonction $t \mapsto t^a$ définie sur $\mathbb{R}^+$ est croissante lorsque $a \geq 0$.

1. Introduisons la fonction $\varphi : x \mapsto (1+x)^\alpha - (1+\alpha x)$ définie sur $[0,+\infty[$.
   φ est dérivable et $\varphi'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha \geq 0$ car $(1+x)^{\alpha-1} \geq 1$.
   Par suite φ est croissante et puisque $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$. L'inégalité demandée en découle de manière immédiate.
2. L'inégalité est immédiate quand $x = 0$ ou $y = 0$. Il reste à l'établir quand $x, y > 0$. Sans perte de généralités, on peut supposer $x \geq y$.
   $(x+y)^\alpha = x^\alpha\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^\alpha$ et $\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^\alpha \geq 1+\alpha\dfrac{y}{x}$ donc $(x+y)^\alpha \geq x^\alpha + \alpha y x^{\alpha-1}$.
   Or $\alpha \geq 1$ et $x^{\alpha-1} \geq y^{\alpha-1}$ donc $(x+y)^\alpha \geq x^\alpha + y^\alpha$.
3. Par l'inégalité de 2. $f(x+y) = (x+y)^\alpha \geq x^\alpha + y^\alpha = f(x)+f(y)$.
   De plus $f(xy) = (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = f(x)f(y)$.

Partie II

1. Si f est constante égale à C, la sur-additivité de f donne $C \geq C + C$ donc $C \leq 0$; la multiplicativité de f donne $C = C^2$ d'où $C = 0$ ou $C = 1$. On conclut alors $C = 0$. Par suite une fonction constante solution ne peut être que la fonction nulle. Inversement la fonction nulle est bien solution.
2. En exploitant la sur-additivité et la multiplicativité de f avec $x = y = 0$, on obtient $f(0) \geq f(0) + f(0)$ et $f(0) = f(0)^2$. Comme ci-dessus, on conclut $f(0) = 0$.
   En exploitant la multiplicativité de f avec $x = y = 1$, on obtient $f(1) = f(1)^2$ d'où $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$.
   Mais si $f(1) = 0$ alors pour tout réel x et par multiplicativité de f : $f(x) = f(x \times 1) = f(x)f(1) = 0$ et f apparaît alors comme étant une fonction constante. Ceci étant exclu, il reste $f(1) = 1$.

3.a Il suffit de raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

3.b Pour $x \neq 0$, $1 = f(1) = f\left(x \times \dfrac{1}{x}\right) = f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ d'où $f(x) \neq 0$ et $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{f(x)}$.

3.c Pour $x > 0$, on a déjà $f(x) \neq 0$. De plus $f(x) = f(\sqrt{x}^2) = f(\sqrt{x})^2 \geq 0$ donc $f(x) > 0$.

4. Soit $x \leq y \in \mathbb{R}^+$. $f(y) = f(x+y-x) \geq f(x) + f(y-x)$ avec $f(y-x) \geq 0$ donc $f(y) \geq f(x)$. Ainsi f est croissante.

Partie III

1. $f(2) \geq f(1) + f(1) = 2$ donc $\ln f(2)$ existe et $\ln f(2) \geq \ln 2 > 0$.
2. $2^q \leq x < 2^{q+1} \Leftrightarrow q\ln 2 \leq \ln x < (q+1)\ln 2 \Leftrightarrow q \leq \dfrac{\ln x}{\ln 2} < q+1 \Leftrightarrow q = E\left(\dfrac{\ln x}{\ln 2}\right)$

3.a $2^{q_p} \leq x^p < 2^{q_p+1}$ donne $\dfrac{q_p}{p} \leq \dfrac{\ln x}{\ln 2} \leq \dfrac{q_p+1}{p}$ d'où $\dfrac{\ln x}{\ln 2} - \dfrac{1}{p} \leq \dfrac{q_p}{p} \leq \dfrac{\ln x}{\ln 2}$.

Par le théorème des gendarmes, on obtient $\dfrac{q_p}{p} \xrightarrow[p \to +\infty]{} \dfrac{\ln x}{\ln 2}$.

3.b Par croissance de f, $f(2^{q_p}) \leq f(x^p) \leq f(2^{q_p+1})$ puis $f(2)^{q_p} \leq f(x)^p \leq f(2)^{q_p+1}$ via II.3.b.
En appliquant le logarithme néperien, on obtient $q_p \ln f(2) \leq p\ln f(x) \leq (q_p+1)\ln f(2)$ sachant $f(x) > 0$

et $f(2) > 0$.

De plus, puisque $\ln f(2) > 0$, on obtient $\frac{q_p}{p} \leq \frac{\ln f(x)}{\ln f(2)} \leq \frac{q_p + 1}{p}$.

3.c En passant cette encadrement à la limite quand $p \to +\infty$ on obtient $\frac{\ln x}{\ln 2} \leq \frac{\ln f(x)}{\ln f(2)} \leq \frac{\ln x}{\ln 2}$ d'où l'égalité $\frac{\ln f(x)}{\ln x} = \frac{\ln f(2)}{\ln 2}$.

4. Notons que $\alpha \geq 1$, puisqu'on a vu $\ln f(2) \geq \ln 2$

Par 3.c, on a $\ln f(x) = \alpha \ln x$ donc $f(x) = x^\alpha$ pour tout $x > 0$. De plus l'égalité $f(x) = x^\alpha$ est aussi vraie pour $x = 0$.