Correction Mines 2024 MP-MPI Maths I

Adrien Joseph et Jean Nougayrède

15 mai 2024

Avertissement. Il y a sûrement des coquilles dans ce corrigé. Il y en a également dans le sujet original.

Partie I : Calcul d'une intégrale

1. Soit $t > 0$. Supposons $1 + te^{i\theta} = 0$. Alors :

$$te^{i\theta} = -1 \quad \text{donc} \quad t = |te^{i\theta}| = 1.$$

On en déduit $e^{i\theta} = -1$ ce qui est absurde car $\theta \in]-\pi, \pi[$.

Ainsi, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}}$ est bien définie, et continue (par opérations) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Étude en 0. On a l'équivalent simple suivant :

$$\frac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}} \sim t^{x-1}$$

qui montre que f est intégrable en 0, par comparaison à un exemple de Riemann ($x-1 > -1$).

Étude en $+\infty$. On a :

$$f(t) \sim \frac{e^{-i\theta}}{t^{2-x}} = \mathrm{O}\big(\frac{1}{t^{2-x}}\big)$$

donc f est intégrable en $+\infty$, par comparaison à un exemple de Riemann ($2 - x > 1$).

En conclusion, f est bien définie et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Pour tout $(t, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$, on pose :

$$g(t, \theta) = \frac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}}.$$

Soit $t > 0$. La fonction $\theta \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}}$ est de classe C^1 sur $]-\pi, \pi[$ et de dérivée :

$$\theta \mapsto -\frac{t^x ie^{i\theta}}{(1+te^{i\theta})^2}$$

Pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$, la fonction $t \mapsto g(t, \theta)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Hypothèse de domination. Soit $\beta \in]0, \pi[$. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in [-\beta, \beta]$.

On a :

$$\Big|\frac{\partial g}{\partial \theta}(t, \theta)\Big| = \frac{t^x}{|1+te^{i\theta}|^2} = \frac{t^x}{1+t^2+2t\underbrace{\cos\theta}_{\geq \cos\beta}} \leq \underbrace{\frac{t^x}{1+t^2+2t\cos\beta}}_{=\varphi_\beta(t)}.$$

La fonction φ_β est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\varphi_\beta(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2-x}} \quad \text{avec} \quad 2 - x > 1,$$

ce qui montre que φ_β est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et fournit l'hypothèse de domination sur tout segment.

Conclusion : r est de classe C^1 sur $]-\pi,\pi[$ et :

$$\forall \theta \in]-\pi,\pi[\quad r'(\theta) = -ie^{i\theta}\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+te^{i\theta})^2}\,\mathrm{d}t.$$

3. Tout d'abord, la fonction h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall t > 0 \quad h'(t) = xt^{x-1}\frac{1}{1+te^{i\theta}} - t^x\frac{e^{i\theta}}{(1+te^{i\theta})^2}.$$

Les fonctions $\theta \mapsto e^{ix\theta}$ et r sont de classe C^1 sur $]-\pi,\pi[$. Par produit, g est de classe C^1 sur $]-\pi,\pi[$ et :

$$\forall \theta \in]-\pi,\pi[\quad g'(\theta) = (ixr(\theta) + r'(\theta))e^{ix\theta}.$$

Par linéarité de l'intégrale on en déduit :

$$\forall \theta \in]-\pi,\pi[\quad g'(\theta) = ie^{ix\theta}\int_0^{+\infty} \frac{xt^{x-1}}{1+te^{i\theta}} - \frac{e^{i\theta}t^x}{(1+te^{i\theta})^2}\,\mathrm{d}t = ie^{ix\theta}\int_0^{+\infty} h'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Limite de h en 0^+. Comme $x > 0$, on a, par opérations :

$$h(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0.$$

Limite de h en $+\infty$. On a l'équivalent simple suivant :

$$h(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-i\theta}}{t^{1-x}} \quad \text{avec} \quad 1-x > 0.$$

On en déduit :

$$h(t) \xrightarrow[t\to +\infty]{} 0.$$

D'après ce qui précède, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h'$ est convergente et :

$$\int_0^{+\infty} h' = \lim_{+\infty} h - \lim_{0^+} h = 0.$$

On en déduit :

$$\forall \theta \in]-\pi,\pi[\quad g'(\theta) = 0$$

donc g est une fonction constante sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$.

4. Soit $\theta \in]0,\pi[$. Alors $(\theta,-\theta) \in]-\pi,\pi[^2$ donc, par la question précédente :

$$g(-\theta) = g(\theta) \quad \text{puis} \quad \frac{1}{2i}(g(-\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta}) = g(\theta)\frac{e^{ix\theta} - e^{-ix\theta}}{2i} = g(\theta)\sin(x\theta).$$

En repartant de la définition en g, on a aussi :

$$\begin{aligned} g(-\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta} &= \int_0^{+\infty} t^{x-1}\Big(\frac{1}{1+te^{-i\theta}} - \frac{1}{1+te^{i\theta}}\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} t^{x-1}\frac{2it\sin\theta}{(1+te^{-i\theta})(1+te^{i\theta})}\,\mathrm{d}t \\ &= 2i\sin\theta\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+t^2+2t\cos\theta}\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

ce qui conclut.

5. Soit $\theta \in \,]0,\pi[$. Comme $\sin\theta$ est strictement positif, on peut effectuer le changement de variable affine strictement croissant $[t = u\sin\theta - \cos\theta]$ dans la dernière intégrale de la question précédente. On obtient alors :

$$\begin{aligned} g(\theta)\sin(x\theta) &= \sin\theta \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+2t\cos\theta+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \sin\theta \int_{\operatorname{cotan}\theta}^{+\infty} \frac{(u\sin\theta-\cos\theta)^x}{1+2u\cos\theta\sin\theta-2\cos^2\theta+u^2\sin^2\theta+\cos^2\theta-2u\sin\theta\cos\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\operatorname{cotan}\theta}^{+\infty} \frac{(u\sin\theta-\cos\theta)^x}{u^2\sin^2\theta+\sin^2\theta}\sin^2\theta\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\operatorname{cotan}\theta}^{+\infty} \frac{(u\sin\theta-\cos\theta)^x}{1+u^2}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

6. Pour tout $\theta \in [\pi/2,\pi[$, on pose f_θ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\theta(u) = \begin{cases} \dfrac{(u\sin\theta-\cos\theta)^x}{1+u^2} & \text{si} \quad u > \operatorname{cotan}\theta \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

On a :

$$\cos\theta \xrightarrow[\theta\to\pi^-]{} -1 \quad \text{et} \quad \sin\theta \xrightarrow[\theta\to\pi^-]{} 0^+ \quad \text{donc} \quad \operatorname{cotan}\theta \xrightarrow[\theta\to\pi^-]{} -\infty.$$

Soit $u \in \mathbb{R}$. Pour θ assez proche de π^-, on a :

$$f_\theta(u) = \frac{(u\sin\theta-\cos\theta)^x}{1+u^2} \quad \text{donc} \quad f_\theta(u) \xrightarrow[\theta\to\pi^-]{} \frac{1}{1+u^2}$$

par continuité de $s \mapsto s^x$ en 1.

Hypothèse de domination. Soit $\theta \in [\pi/2,\pi[$ et $u > \operatorname{cotan}\theta$.

Si $u \leq 0$, alors :

$$0 \leq u\sin\theta - \cos\theta \leq 1 \quad \text{donc} \quad |f_\theta(u)| = \frac{(u\sin\theta-\cos\theta)^x}{1+u^2} \leq \frac{1}{1+u^2}$$

par croissance de $s \mapsto s^x$ sur $\mathbb{R}_+$.

Si $u > 0$, alors :

$$0 \leq u\sin\theta - \cos\theta \leq u+1 \quad \text{donc} \quad |f_\theta(u)| \leq \frac{(u+1)^x}{1+u^2}.$$

On dispose donc de la majoration suivante :

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad |f_\theta(u)| \leq \varphi(u) \quad \text{avec} \quad \varphi(u) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad u \leq 0 \\ \dfrac{(u+1)^x}{1+u^2} \quad \text{si} \quad u > 0. \end{cases}$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, intégrable en $-\infty$ car nulle au voisinage de $-\infty$ et :

$$\varphi(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u^{2-x}} \quad \text{avec} \quad 2-x > 1$$

donc φ est intégrable en $+\infty$.

Par le théorème de convergence dominée (et la question précédente), il vient :

$$g(\theta)\sin(x\theta) = \int_{\mathbb{R}} f_\theta(u)\,\mathrm{d}u \xrightarrow[\theta\to\pi^-]{} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

7. Comme g est une fonction constante sur $]-\pi,\pi[$, on a aussi :

$$g(\theta)\sin(x\theta) = g(0)\sin(x\theta) \xrightarrow[x\to\theta^-]{} g(0)\sin(x\pi) = \sin(x\pi)\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Par unicité de la limite, on en déduit :

$$\sin(x\pi)\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\big[\arctan u\big]_{-\infty}^{+\infty}=\pi.$$

Comme $x\in\,]0,1[$, on a $x\pi\in\,]0,\pi[$ donc $\sin(x\pi)\neq 0$ puis :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

8. Par la relation de Chasles, on a :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Dans la seconde intégrale, on effectue le changement de variable $[t=1/u]$:

$$\int_1^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{u^{1-x}}{1+1/u}\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=\int_0^1\frac{u^{-x}}{1+u}\,\mathrm{d}u.$$

On conclut par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^{x-1}+t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

9. Pour tout $t\in\,]0,1[$, on a :

$$\frac{t^{x-1}}{1+t}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^{x-1+k}.$$

Hypothèse de domination. Soit $t\in\,]0,1[$ et $n\in\mathbb{N}$. La suite $(t^{x-1+k})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0. Par le théorème des séries alternées, on dispose donc de la majoration :

$$\Big|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{x-1+k}\Big|\leq t^{x-1}.$$

La fonction $t\mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ (exemple de Riemann avec $x-1>-1$).

Par le théorème de convergence dominée, on a donc :

$$\int_0^1\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{x-1+k}\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{x-1+k}\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{x-1+k}\,\mathrm{d}t,$$

ce qui justifie l'interversion série-intégrale :

$$\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\int_0^1 t^{x-1+k}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}.$$

10. D'après la question précédente, on a :

$$\forall y\in\,]-1,0[\qquad \int_0^1\frac{t^y}{1+t}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{y+1+k}.$$

En remplaçant y par $-x$, on en déduit :

$$\int_0^1\frac{t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{-x+1+k}.$$

Par somme, en utilisant la question 8, on peut conclure :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{n+1-x}.$$

11. D'après la question 7 et par décalage d'indice dans la seconde somme, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{\sin(\pi x)} &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-x} \\
&= \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \Big(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \Big) \\
&= \frac{1}{x} - 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - x^2} \cdot
\end{aligned}$$

12. Soit $y \in]0, \pi[$. On prend $x = y/\pi$ dans ce qui précède pour obtenir :

$$\frac{\pi}{\sin y} = \frac{\pi}{y} - \frac{2y}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - (y/\pi)^2} \cdot$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned}
2y \sin y \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{y^2 - n^2\pi^2} &= -2y \sin y \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - (y/\pi)^2} \\
&= \frac{\sin y}{\pi} \Big(\frac{\pi}{\sin y} - \frac{\pi}{y} \Big) \\
&= 1 - \frac{\sin y}{y} \cdot
\end{aligned}$$

Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichelet généralisée

13. Considérons la fonction continue (par opérations) $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ qui à tout $t > 0$ associe $\dfrac{1 - \Big((\cos(t) \Big)^{2p+1}}{t^2}$.

Étude en 0. Puisque $\lim\limits_{t \to 0} \cos(t) = 1$ et que $(1+u)^{2p+1} - 1 \underset{u \to 0}{\sim} (2p+1)u$, on a :

$$\Big((\cos(t) \Big)^{2p+1} - 1 \underset{t \to 0}{\sim} (2p+1) \Big(\cos(t) - 1 \Big) \underset{t \to 0}{\sim} -\frac{2p+1}{2} t^2. \tag{1}$$

Donc $\varphi(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{2p+1}{2} \cdot$ Puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{2p+1}{2}\,\mathrm{d}t$ converge et que $\dfrac{2p+1}{2} \geq 0$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Étude en $+\infty$. On remarque que pour tout $t \geq 1$, $0 \leq \varphi(t) \leq \dfrac{2}{t^2}$. Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \Big((\cos(t) \Big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Posons $\psi_1 : t > 0 \mapsto -\dfrac{1}{t}$ et $\psi_2 : t > 0 \mapsto 1 - \Big((\cos(t) \Big)^{2p+1}$. D'après l'équivalent obtenu dans la relation (1), on a :

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \Big((\cos(t) \Big)^{2p+1}}{t} = 0 \cdot$$

Par ailleurs, comme la fonction cos est bornée,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1 - \Big((\cos(t) \Big)^{2p+1}}{t} = 0.$$

Ainsi le crochet $[\psi_1\psi_2]_0^{+\infty}$ converge et est nul. Puisque les fonctions ψ_1 et ψ_2 sont par ailleurs de classe $\mathcal{C}^1$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} {\psi_1}'(t)\psi_2(t)\,\mathrm{d}t$ converge d'après la première partie de la question, l'intégration par parties assure d'une part que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_1(t){\psi_2}'(t)\,\mathrm{d}t$ converge et d'autrre part que $\displaystyle\int_0^{+\infty} {\psi_1}'(t)\psi_2(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \psi_1(t){\psi_2}'(t)\,\mathrm{d}t$. D'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big((\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = (2p+1)\int_0^{+\infty} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que la fonction intégrée est continue sur le segment $[\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi]$. Faisons les changements de variable affines $[s = t - n\pi]$

$$\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big((\cos(s)\Big)^{2p}\,\frac{(-1)^n\sin(s)}{s+n\pi}\,\mathrm{d}s$$

et $[u = -s]$

$$\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big((\cos(u)\Big)^{2p}\,\frac{(-1)^n\sin(u)}{u-n\pi}\,\mathrm{d}u.$$

En sommant puis en divisant par 2, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}(-1)^n\sin(t)\left(\frac{1}{t+n\pi}+\frac{1}{t-n\pi}\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

la dernière égalité venant de la parité de la fonction intégrée.

15. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En sommant de $n = 1$ à $n = N$ la relation trouvée à la question précédente et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+N\pi} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\dfrac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\cdot$ Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $|f_n(t)| \leq \dfrac{1}{\pi(n^2-\frac{1}{4})}\cdot$ Comme la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$. Comme par ailleurs pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions f_n sont continues, on en déduit que la série $\displaystyle\sum \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. D'où

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{+\infty} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t.$$

La relation (2) se réécrit donc ainsi :

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+N\pi} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\right)\mathrm{d}t.$$

Or, d'après la question 13, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \Big((\cos(t)\Big)^{2p} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. On en déduit finalement que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \Big((\cos(t)\Big)^{2p} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big((\cos(t)\Big)^{2p} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\right)\,\mathrm{d}t.$$

16. D'après la question 13, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \Big((\cos(t)\Big)^{2p} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. En utilisant la relation de Chasles puis la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \Big((\cos(t)\Big)^{2p} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\\
=\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big((\cos(t)\Big)^{2p} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big((\cos(t)\Big)^{2p} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\right)\,\mathrm{d}t\\
=\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big((\cos(t)\Big)^{2p} \left(\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\right)\,\mathrm{d}t\\
=\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

la dernière égalité venant de la question 12.

17. On écrit, en utilisant la formule d'Euler puis la formule du binôme de Newton et enfin en regroupant les termes :

$$\begin{aligned}
2^{2p}(\cos(t))^{2p} &= (e^{it}+e^{-it})^{2p}\\
&= \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{ikt}e^{-i(2p-k)t}\\
&= \binom{2p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} e^{2i(k-p)t} + \sum_{k=p+1}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2i(k-p)t}\\
&= \binom{2p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} e^{2i(k-p)t} + \binom{2p}{2p-k} e^{2i(2p-k-p)t}\\
&= \binom{2p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \Big(e^{2i(k-p)t} + e^{2i(p-k)t}\Big)\\
&= \binom{2p}{p} + 2\sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \cos(2(p-k)t).
\end{aligned}$$

18. D'après les questions 13 et 16,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big((\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = (2p+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big((\cos(t)\Big)^{2p}\,\mathrm{d}t$$

donc, d'après la question précédente et la linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big((\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\frac{2p+1}{2^{2p}}\binom{2p}{p} + \frac{2p+1}{2^{2p-1}}\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(p-k)t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2kt)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2kt)}{2k}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$. Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big((\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\frac{2p+1}{2^{2p}}\binom{2p}{p} = \frac{\pi}{2}\frac{2p+1}{2^{2p}}\frac{(2p)!}{(p!)^2} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p+1)!}{2^{2p}.(p!)^2}.$$

Partie IV : Calcul de $E(|S_n|)$

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que, comme les X_k sont bornées, S_n est d'espérance et de variance finies. Comme les X_k sont centrées, la linéarité de l'espérance assure que S_n l'est aussi : $E(S_n) = 0$. Comme les X_k sont indépendantes et de variance finie, on a : $V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $V(X_k) = E({X_k}^2) - E(X_k)^2 = E(1) - 0 = 1$. Donc $V(S_n) = n$.
20. Remarquons que $\cos(S+T) = \cos(S)\cos(T) - \sin(S)\sin(T)$ et que pour toute variable aléatoire réelle X, $\cos(X)$ et $\sin(X)$ sont bornées donc d'espérance finie. Par indépendance des variables aléatoires S et T, on a donc :
$$E\big(\cos(S+T)\big) = E\big(\cos(S)\big)E\big(\cos(T)\big) - E\big(\sin(S)\big)E\big(\sin(T)\big).$$
Or, comme T et $-T$ suivent la même loi, $\sin(T)$ et $\sin(-T)$ suivent aussi la même loi. En particulier (rappelons qu'elles sont d'espérance finie), $E\big(\sin(T)\big) = E\big(\sin(-T)\big)$, *i.e.* $E\big(\sin(T)\big) = -E\big(\sin(T)\big)$, donc $E\big(\sin(T)\big) = 0$. Finalement, $E\big(\cos(S+T)\big) = E\big(\cos(S)\big)E\big(\cos(T)\big)$.
Remarque. L'hypothèse « S et T prennent un nombre fini de valeurs réelles » n'a pas été utilisée.
21. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E\big(\cos(tS_n)\big) = \big(\cos(t)\big)^n$. Puisque $X_1 \in \{-1, 1\}$ presque sûrement et que cos est paire, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\cos(tS_1) = \cos(tX_1) = \cos(t)$ presque sûrement. Ainsi $E\big(\cos(tS_1)\big) = \cos(t)$, ce qui établit l'initialisation. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E\big(\cos(tS_n)\big) = \big(\cos(t)\big)^n$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Remarquons que $tS_{n+1} = tS_n + tX_{n+1}$ et que, par le lemme des coalitions, les variables aléatoires tS_n et tX_{n+1} sont indépendantes. Comme par ailleurs tX_{n+1} et $-tX_{n+1}$ ont même loi (à savoir la loi uniforme sur l'ensemble $\{-t, t\}$), on peut appliquer la question 20 (le fait que tS_n et tX_{n+1} prennent un nombre fini de valeurs réelles est vrai mais inutile comme signalé à la remarque de la question 20) qui assure que
$$E\big(\cos(tS_{n+1})\big) = E\big(\cos(tS_n)\big)E\big(\cos(tX_{n+1})\big).$$
L'hypothèse de récurrence, le fait que $X_{n+1} \in \{-1, 1\}$ presque sûrement et la parité de cos assurent alors que $E\big(\cos(tS_{n+1})\big) = \big(\cos(t)\big)^{n+1}$, et ce pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui établit l'hérédité. Finalement, d'après le principe de récurrence, on a : tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E\big(\cos(tS_n)\big) = \big(\cos(t)\big)^n$.
22. Supposons dans un premier temps a positif. Alors $|b| < a$ donc $-b < a$ puis $a + b > 0$ et $|a+b| = a + b = |a| + \text{signe}(a)\, b$. Si maintenant a est négatif, alors $|b| < -a$ donc $b < -a$ puis $a + b < 0$ et $|a+b| = -a - b = |a| + \text{signe}(a)\, b$. Dans tous les cas, on a bien $|a+b| = |a| + \text{signe}(a)\, b$.
Notons $A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \{|X_k| = 1\}$. Remarquons que, en tant qu'intersection dénombrable d'événements presque sûrs, A est un événement presque sûr. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\omega \in A$. Comme $S_{2n-1}(\omega) = \sum_{k=1}^{2n-1} X_k(\omega)$ est la somme d'un nombre impair (à savoir $2n-1$) de nombres impairs (à savoir -1 ou 1), $S_{2n-1}(\omega)$ est impair donc $S_{2n-1}(\omega) \in \mathbb{Z}^*$. Par ailleurs, $|X_{2n}(\omega)| = 1$. D'où $S_{2n-1}(\omega) \neq 0$ et $|X_{2n}(\omega)| \leq |S_{2n-1}(\omega)|$. La première partie de la question assure alors que
$$|S_{2n-1}(\omega) + X_{2n}(\omega)| = |S_{2n-1}(\omega)| + \text{signe}(S_{2n-1}(\omega))\, X_{2n}(\omega),$$
i.e.
$$|S_{2n}(\omega)| = |S_{2n-1}(\omega)| + \text{signe}(S_{2n-1}(\omega))\, X_{2n}(\omega),$$
et ce pour tout ω appartenant à l'événement presque sûr A. Donc, presque sûrement,
$$|S_{2n}| = |S_{2n-1}| + \text{signe}(S_{2n-1})\, X_{2n}.$$
Or, comme les variables aléatoires S_{2n}, S_{2n-1}, $\text{signe}(S_{2n-1})$ et X_{2n} sont bornées, elles sont d'espérance finie. D'où
$$E(|S_{2n}|) = E(|S_{2n-1}|) + E(\text{signe}(S_{2n-1})\, X_{2n}).$$
Or, comme, d'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires $\text{signe}(S_{2n-1})$ et X_{2n} sont indépendantes, on a (rappelons qu'elles sont d'espérance finie) :
$$E(\text{signe}(S_{2n-1})\, X_{2n}) = E(\text{signe}(S_{2n-1}))\, E(X_{2n}).$$
Puisque $E(X_{2n}) = 0$, on en déduit que $E(\text{signe}(S_{2n-1})\, X_{2n}) = 0$ puis que $E(|S_{2n}|) = E(|S_{2n-1}|)$.

23. D'après la question 18 appliquée avec $p=0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$. Pour tout $s>0$, le changement de variable affine strictement croissant $[u = st]$ assure alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{s^2t^2} s\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, *i.e.* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}s$. La fonction cos étant paire, pour tout $s \in \mathbb{R}^*$, on a : pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\frac{1-\cos(st)}{t^2} = \frac{1-\cos(|s|t)}{t^2}$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}|s|$. Comme $\cos(0)=1$, on a aussi, lorsque $s=0$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}|s|$. Finalement, pour tout $s\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}|s|$.
24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque S_n appartient presque sûrement à $[\![-n,n]\!]$, S_n est d'espérance finie et, d'après la formule de transfert, $\displaystyle E(|S_n|) = \sum_{s=-n}^{n} P(S_n=s)|s|$. La question précédente assure alors que
$$E(|S_n|) = \frac{2}{\pi}\sum_{s=-n}^{n} P(S_n=s)\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Par linéarité de l'intégrale, on a donc :
$$E(|S_n|) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\sum_{s=-n}^{n} P(S_n=s)\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Or, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, d'après la formule de transfert puis la question 21, on a :
$$\sum_{s=-n}^{n} P(S_n=s)\cos(st) = E\big(\cos(tS_n)\big) = \big(\cos(t)\big)^n.$$
Finalement, $\displaystyle E(|S_n|) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\big(\cos(t)\big)^n}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
25. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, en remarquant que $2n-1\in\mathbb{N}^*$, les questions 22, 24 puis 18 assurent que
$$E(|S_{2n}|) = E(|S_{2n-1}|) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\big(\cos(t)\big)^{2n-1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}\big((n-1)!\big)^2}.$$