Proba (Partie 1) PARTIE 1

Ex1 Considérons les évènements suivants :

I_k : "Ali emprunte l'itinéraire I_k"

H : "Ali arrive à l'heure"

On veut calculer : $P(I_1/H)$, mais d'après Bayes : $P(I_1/H) = \dfrac{P(H/I_1)\cdot P(I_1)}{\sum_{k=1}^{3} P(H/I_k)\cdot P(I_k)}$

et on a : $P(I_k) \underset{}{\overset{\forall 1 \le k \le 3}{=}} 1/3$

$P(H/I_1) = 1$

$P(H/I_2) = 3/4$

$P(H/I_3) = 2/3$, remplacer ...

Ex2 : (Les jours commencent de $k=0$)

0) $r_0 = 0$ (le jour 0, la place est libre)

$r_1 = P(R_1)$

avec : $\boxed{R_k : \text{"La place est reservée le jour k"}}$

or le jour 0, la place est libre, alors

$P(R_1) = 4/10 \Rightarrow \boxed{r_1 = 4/10}, \boxed{r_0 = 0}$

1) $r_{k+1} = P(R_{k+1})$

$= \underbrace{P(R_{k+1}/R_k)}_{9/10} \cdot \underbrace{P(R_k)}_{r_k} + \underbrace{P(R_{k+1}/\overline{R_k})}_{4/10} \cdot \underbrace{P(\overline{R_k})}_{1-r_k}$

$\Rightarrow \boxed{r_{k+1} = \frac{1}{2} r_k + \frac{2}{5}}$, (pour tout $k \geq 0$)

2) $(r_k)_{k\geq 0}$ est une suite arithmético-géométrique

$\rightarrow l = \frac{1}{2} l + \frac{2}{5} \Leftrightarrow l = \frac{4}{5}$

$\rightarrow$ La suite $(r_k - l)_{k\geq 0}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

D'où : $\forall k \in \mathbb{N}$, $r_k - \frac{4}{5} = \left(r_0 - \frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k$

C/c : $\boxed{\forall k \geq 0,\ r_k = \frac{4}{5} - \frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k}$

ii) $\lim_{n} r_n = \frac{4}{5}$

Ex3 : $U_1 \begin{bmatrix} B & N \\ 13 & 5 \end{bmatrix}$ $U_2 \begin{bmatrix} B & N \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$

1) $P(B_1) = \underbrace{P(B_1/U_1)}_{\frac{13}{18}} \underbrace{P(U_1)}_{1/2} + \underbrace{P(B_1/U_2)}_{\frac{10}{22}} \underbrace{P(U_2)}_{1/2} = \frac{233}{396}$

$P(B_2) = \underbrace{P(B_2/B_1)}_{\frac{13}{18}} \underbrace{P(B_1)}_{\frac{233}{396}} + \underbrace{P(B_2/\overline{B_1})}_{\frac{10}{22}} \underbrace{P(\overline{B_1})}_{\frac{163}{396}} = \frac{47989}{78408}$

2) $P(B_n) = \underbrace{P(B_n/B_{n-1})}_{13/18} \cdot P(B_{n-1}) + \underbrace{P(B_n/\overline{B_{n-1}})}_{10/22} \underbrace{P(\overline{B_{n-1}})}_{(1-P(B_{n-1}))}$

$\Rightarrow \boxed{P(B_n) = \frac{53}{198} \cdot P(B_{n-1}) + \frac{5}{11}}$

3) Notons $P(B_n) = r_n$, pour tout $n \geq 1$.

i) On a : $\boxed{\forall n \geq 2,\ r_n = \frac{53}{198} \cdot r_{n-1} + \frac{5}{11}}$

C'est une suite arithmético-géométrique (encore)

$\longrightarrow$ Point fixe : $l = \frac{53}{198} l + \frac{5}{11} \Leftrightarrow l = \frac{18}{29}$.

$\longrightarrow$ La suite $(r_n - l)_{n\geq 1}$ suite géométrique de raison $\frac{53}{198}$.

$\Rightarrow \boxed{\forall n \geq 1,\ r_n = \frac{18}{29} - \frac{371}{11484} \cdot \left(\frac{53}{198}\right)^{n-1}}$

ii) $\lim_{n} r_n = \frac{18}{29}$

iii) Intérprétation : Après un nombre assez grand de tirages, on a 62% de chance pour tirer une boule blanche.

Ex4 :

1) a) i) $p_{n+1} = P(M_{n+1})$

$= \underbrace{P(M_{n+1}/M_n)}_{(1-2a)} \underbrace{P(M_n)}_{p_n} + \underbrace{P(M_{n+1}/S_n)}_{a} \underbrace{P(S_n)}_{q_n} + \underbrace{P(M_{n+1}/B_n)}_{a} \underbrace{P(B_n)}_{r_n}$

$\Rightarrow \boxed{p_{n+1} = (1-2a)p_n + a q_n + a r_n}$

(Partie 2) : page 1

(ii) $q_{n+1} = P(S_{n+1})$

$= \underbrace{P(S_{n+1}/M_n)}_{a}\underbrace{P(M_n)}_{p_n}+\underbrace{P(S_{n+1}/S_n)}_{(1-2a)}\underbrace{P(S_n)}_{q_n}+\underbrace{P(S_{n+1}/B_n)}_{a}\cdot\underbrace{P(B_n)}_{r_n}$

D'où $\boxed{q_{n+1} = a\,p_n + (1-2a)q_n + a\,r_n}$

(b) $p_n+q_n+r_n=1 \Rightarrow \boxed{r_n = 1-p_n-q_n}$

2) $p_{n+1} = (1-2a)p_n + a\,q_n + a\underbrace{r_n}_{1-p_n-q_n} = (1-3a)p_n + a$

et de même $\boxed{q_{n+1} = (1-3a)q_n + a}$

3) i) $\left(p_{n+1} = (1-3a)p_n + a,\ \forall n \geq 1\right)$ et $(p_1 = 0)$

On a : $l = (1-3a)l + a \iff l = 1/3$.

et $(p_n - l)_{n\geq 1}$ géométrique de raison $(1-3a)$

$\Rightarrow \forall n \geq 1,\ p_n - \frac{1}{3} = \underbrace{\left(p_1 - \frac{1}{3}\right)}_{=-1/3}\cdot(1-3a)^{n-1}$

$\Rightarrow \boxed{\forall n \geq 1,\ p_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-3a)^{n-1}}$

(ii) avec $q_1 = 1$, on trouve de même :

$\boxed{\forall n \geq 1,\ q_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1-3a)^{n-1}}$

(iii) On déduit donc :

$\boxed{\forall n \geq 1,\ r_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-3a)^{n-1}}$

(iv) On a $0 < a < \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} < 1-3a < 1$

D'où $(1-3a)^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \boxed{\lim_n p_n = \lim_n q_n = \lim_n r_n = \frac{1}{3}}$

(v) Interprétation : Après un assez grand nombre de jours, le titre aura les mêmes chances de monter, se stabiliser ou baisser (soit 33,33 %)

partie 2, page 2

Ex 5 :

1) $\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \\ s_0 = 0 \end{cases}$, car à $t=0$, la guêpe est en A.

$\begin{cases} a_1 = P(A_1) = 1/3 \\ b_1 = P(B_1) = 2/3 \\ s_1 = P(S_1) = 0 \end{cases}$

2) a) i) $a_{n+1} = P(A_{n+1})$

$= \underbrace{P(A_{n+1}/A_n)}_{1/3}\cdot\underbrace{P(A_n)}_{a_n}+\underbrace{P(A_{n+1}/B_n)}_{1/4}\underbrace{P(B_n)}_{b_n}+\underbrace{P(A_{n+1}/S_n)}_{=0}\underbrace{P(S_n)}_{s_n}$

$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n$

(ii) $b_{n+1} = P(B_{n+1})$

$= \underbrace{P(B_{n+1}/A_n)}_{2/3}\underbrace{P(A_n)}_{a_n}+\underbrace{P(B_{n+1}/B_n)}_{1/2}\underbrace{P(B_n)}_{b_n}+\underbrace{P(B_{n+1}/S_n)}_{=0}\underbrace{P(S_n)}_{s}$

$\Rightarrow b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n$

b) $U_{n+1} = \frac{6}{10}a_{n+1} - \frac{3}{10}b_{n+1}$

$= \frac{6}{10}\left(\frac{a_n}{3}+\frac{b_n}{4}\right) - \frac{3}{10}\left(\frac{2a_n}{3}+\frac{b_n}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \forall n \geq 1,\ U_n = 0$; $U_0 \xrightarrow{\text{on trouve}} 3/5$

c) i) $v_{n+1} = \dots = \frac{5}{6}v_n$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

ii) $\left(\forall n \geq 0,\ v_n = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$; $(v_0 = 2/5)$

d) $\forall n \geq 1,\ \begin{cases} U_n = 0 \\ v_n = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n \end{cases}$

$\Rightarrow \forall n \geq 1,\ \begin{cases} \frac{6}{10}a_n - \frac{3}{10}b_n = 0 \\ \frac{4}{10}a_n + \frac{3}{10}b_n = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n \end{cases}$

$\Rightarrow \forall n \geq 1,\ \begin{cases} a_n = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n \\ b_n = \frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n \end{cases}$; $\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \end{cases}$

3) i) $s_n = P(S_n) =$

$= \underbrace{P(S_n/B_{n-1})}_{1/4}\cdot\underbrace{P(B_{n-1})}_{b_{n-1}} + \underbrace{P(S_n/A_{n-1})\cdot P(A_{n-1})}_{=0}$

$+ \underbrace{P(S_n/S_{n-1})}_{1}\cdot\underbrace{P(S_{n-1})}_{s_{n-1}} = \frac{1}{4}b_{n-1} + s_{n-1}$

(ii) $\forall n \geq 2,\ S_n - S_{n-1} = \frac{1}{4} b_{n-1}$

$\Rightarrow \forall n \geq 2,\ \underbrace{\sum_{k=2}^{n} (S_k - S_{k-1})}_{= S_n - S_1 \text{ (télescopie)}} = \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{n} b_{k-1}$

donc : $\sum_{k=2}^{n} b_{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} b_k = \frac{4}{5} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{5}{6}\right)^k$

$= \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 \cdot \frac{1 - (5/6)^{n-1}}{1 - \frac{5}{6}}$

$\Rightarrow \forall n \geq 2,\ S_n = \underbrace{S_1}_{=0} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1 - (5/6)^{n-1}}{\frac{1}{6}}$

Enfin : $\boxed{\forall n \geq 2,\ S_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}$

(iii) $\lim_{n} S_n = 1$

(iv) Interprétation :

Pour un temps assez grand, la guêpe finira par se libérer

%