Convexité

Exercice 1 :

Montrer les inégalités suivantes via la convexité :

1) $\forall x \succeq 0,\ \sinh(x) \succeq x$

2) $\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \preceq x$

3) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi}x \preceq \sin x \preceq x$

4) $\forall x \in [0,1],\ 1+x \preceq e^x \preceq 1+(e-1)x$

5) $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \succeq 0,\ x^{n+1}-(n+1)x+n \succeq 0$

6) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x_1,\cdots,x_{2^n} \in \mathbb{R}^+,\ \left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k\right)^{\frac{1}{2^n}} \preceq \dfrac{\sum_{k=1}^{2^n} x_k}{2^n}$

   Inégalité vue et démontrée dans le TD de <Récurrence>

7) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \cos(x) \succeq 1-\frac{2}{\pi}x$

   (Extrait du CNC MP 2014)

Exercice 2 :

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x_1,\cdots,x_n \in \mathbb{R}^{+*},\ \frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}} \preceq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \preceq \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \preceq \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{n}}$$

(La deuxième inégalité s'appelle "L'inégalité arithmético-géométrique")

Exercice 3 :

Considérons la fonction

$$f:\ \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(\ln x) \end{array}$$

1) Montrer que f est concave.

2) En déduire que

$$\forall x,y \in]1,+\infty[,\ \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \succeq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$$

Exercice 4 :

1) Montrer que :
   a) La fonction $x \longmapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$
   b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ x_1,\cdots,x_n \in\ ]0,+\infty[,\ 1+\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \preceq \left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)^{\frac{1}{n}}$
2) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a_1,\cdots,a_n \succ 0,\ \forall b_1,\cdots,b_n \succ 0,\ \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{n}} \preceq \left(\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 5 :

Soit $(p,q) \in]0,+\infty[^2$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

1) Montrer que :
   a) $\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2,\ \sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \preceq \frac{a}{p}+\frac{b}{q}$
   b) $\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2,\ ab \preceq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$
   Dite inégalité de Young
2) En déduire que

$$\forall\ (a_1,a_2,b_1,b_2) \in]0,+\infty[^4,\ \frac{a_1b_1}{\sqrt[p]{a_1^p+a_2^p}\sqrt[q]{b_1^q+b_2^q}} \preceq \frac{1}{p}\frac{a_1^p}{a_1^p+a_2^p}+\frac{1}{q}\frac{b_1^q}{b_1^q+b_2^q}$$

3) Conclure alors que

$$\forall\ (a_1,a_2,b_1,b_2) \in]0,+\infty[^4,\ a_1b_1+a_2b_2 \preceq \sqrt[p]{a_1^p+a_2^p}\sqrt[q]{b_1^q+b_2^q}$$

4) Montrer qu'en général, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n) \in\ ]0,+\infty[^{2n},\ \sum_{k=1}^{n} a_kb_k \preceq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} a_k^p}\sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n} b_k^q}$$

NB :

a) *Cette inégalité s'appelle l'inégalité de Minkowski.*
b) Pour $p=q=2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Scwarz.

Convexité

Exercice 1 :

Montrer les inégalités suivantes via la convexité :

1) $\forall x \succeq 0,\ \sinh(x) \succeq x$

2) $\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \preceq x$

3) $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi}x \preceq \sin x \preceq x$

4) $\forall x \in [0,1],\ 1+x \preceq e^x \preceq 1+(e-1)x$

5) $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \succeq 0,\ x^{n+1}-(n+1)x+n \succeq 0$

6) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x_1,\cdots,x_{2^n} \in \mathbb{R}^+,\ \left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k\right)^{\frac{1}{2^n}} \preceq \frac{\sum_{k=1}^{2^n} x_k}{2^n}$

Inégalité vue et démontrée dans le TD de <Récurrence>

7) $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}],\ \cos(x) \succeq 1-\frac{2}{\pi}x$

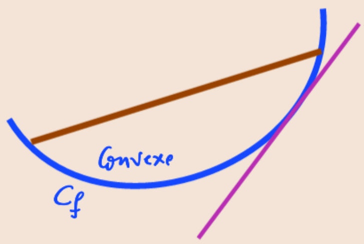
(Extrait du CNC MP 2014)

Solution

1) $\forall x \succeq 0,\ \sinh(x) \succeq x$

La fonction sh est convexe sur $\mathbb{R}^+$, alors sa courbe est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$:

$$(T_0) : y = \underbrace{sh'(0)}_{=1}(x-0) + \underbrace{sh(0)}_{=0}$$



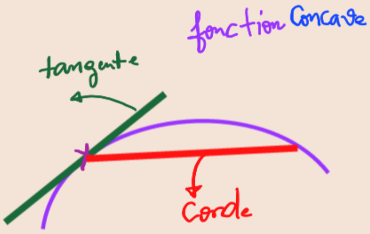
Càd $(T_0) : y = x$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ sh(x) \geqslant x$ $\square$

2) $\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \preceq x$

La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $]-1,+\infty[$, alors sa courbe est au-dessous de sa tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$:

$$(T_0) : y = \underbrace{f'(0)}_{=1}(x-0) + \underbrace{f(0)}_{=0}$$



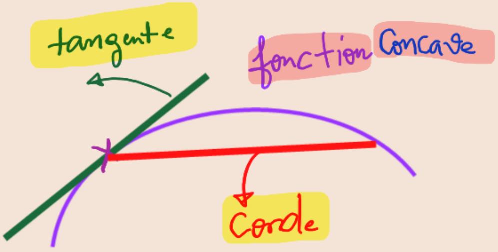
Càd $(T_0) : y = x$

Ainsi : $\forall x \in]-1,+\infty[,\ f(x) \leq x$

Càd $\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leq x$

$\square$

3) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi}x \preceq \sin x \preceq x$



Nous avons ici deux inégalités à établir :

i) M que : $\left(\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}],\ \sin x \leq x\right)$

La fonction sin est concave sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, alors sa courbe est au-dessous de sa tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$:

$$(T_0) : y = \underbrace{\sin'(0)}_{=1}(x-0) + \underbrace{\sin(0)}_{=0}$$

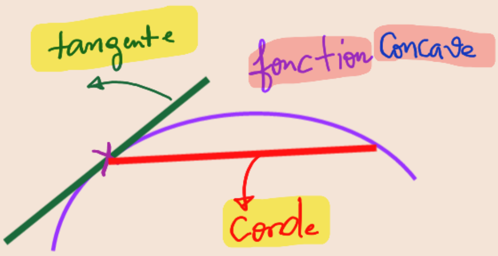
Càd $(T_0) : y = x$

Ainsi : $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}],\ \sin(x) \leq x$

$\square$

ii) M que : $\left(\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi}x \leq \sin x\right)$

La fonction sin est concave sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, alors sa courbe est au-dessus de sa corde d'extrémités les points $(0,0)$ et $(\frac{\pi}{2},1)$.



Cette corde est d'équation : $y = ax+b$

Elle passe par $(0,0)$ et $(\frac{\pi}{2},1)$, d'où $\begin{cases} 0 = a.0+b \\ 1 = a.\frac{\pi}{2}+b \end{cases}$

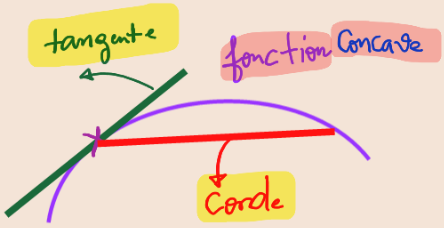
Càd $\begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{2}{\pi} \end{cases}$

Ainsi son équation est $y = \frac{2}{\pi}x$

Par suite : $\left(\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi}x \leq \sin x\right)$

$\square$

$\boxed{7)}$ $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \cos(x) \succeq 1 - \frac{2}{\pi}x$
(Extrait du CNC MP 2014)



La fonction cos est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, alors sa courbe est au-dessus de sa corde d'extrémités les points $(0,1)$ et $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

Cette corde est d'équation : $y = ax + b$

Elle passe par $(0,1)$ et $(\frac{\pi}{2}, 0)$, d'où $\begin{cases} 1 = a.0 + b \\ 0 = a.\frac{\pi}{2} + b \end{cases}$

Càd $\begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{2}{\pi} \end{cases}$

Ainsi son équation est $y = -\frac{2}{\pi}x + 1$

Par suite : $\left(\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \cos x \geqslant 1 - \frac{2}{\pi}x\right)$ $\square$

$\boxed{6)}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x_1, \cdots, x_{2^n} \in \mathbb{R}^+,\ \left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k\right)^{\frac{1}{2^n}} \preceq \dfrac{\sum_{k=1}^{2^n} x_k}{2^n}$

Cas 1 : Si tous les x_k sont dans $]0, +\infty[$

On a :

$$\left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k\right)^{\frac{1}{2^n}} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{2^n} x_k}{2^n} \iff \ln\left(\left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k\right)^{\frac{1}{2^n}}\right) \leqslant \ln\left(\frac{\sum_{k=1}^{2^n} x_k}{2^n}\right)$$

$$\iff \frac{1}{2^n} \ln\left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k\right) \leqslant \ln\left(\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \cdot x_k\right)$$

$$\iff \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \ln(x_k) \leqslant \ln\left(\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \cdot x_k\right)$$

Ce qui est vrai, car $\ln$ est concave sur $]0,+\infty[$, les x_k dans $]0,+\infty[$,

et $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} = 1$. $\square$

Cas 2 : Si l'un des x_k est nul :

On a $\left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k\right)^{\frac{1}{2^n}} = 0$ et $\frac{\sum_{k=1}^{2^n} x_k}{2^n} \geq 0$

Alors l'inégalité voulue est vérifiée. $\square$

5) $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \succeq 0,\ x^{n+1} - (n+1)x + n \succeq 0$

Exercice 2 :

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^{+*},\ \frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \preceq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \preceq \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \preceq \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{n}}$$

(La deuxième inégalité s'appelle "L'inégalité arithmético-géométrique")

Solution

On a trois inégalités à montrer :

1) M. que : $\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \preceq \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$

On a :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \preceq \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \iff \ln\left[\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}\right] \leqslant \ln\left[\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}\right]$$

$$\iff \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant \ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot x_k\right)$$

$$\iff \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) \leqslant \ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot x_k\right)$$

$$\iff \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot\ln(x_k) \leqslant \ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot x_k\right)$$

Ce qui est vrai, car ln est concave dans $]0,+\infty[$, que tous les x_k sont dans $]0,+\infty[$, et que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$ et $\frac{1}{n} \geqslant 0$.

2) M. que : $\dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}} \preceq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}$

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \preceq \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$$

Tirons-la à partir de l'inégalité établie en 1°) :

On a :

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}} \preceq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \iff \frac{1}{\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}}{n}$$

$$\iff \left(\frac{1}{\prod_{k=1}^{n} x_k}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}}{n}$$

$$\iff \left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_k}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}}{n}$$

Ce qui est vrai d'après l'inégalité dans 1°) $\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \preceq \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$, en remplaçant x_k par $\frac{1}{x_k}$.

3) M. que $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \preceq \sqrt{\dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{n}}$

Piste 1

On a :

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \preceq \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{n}} \iff \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}\right)^2 \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{n}$$

$$\iff f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{n}, \text{ où } f : t \mapsto t^2$$

Ce qui est vrai car f est convexe sur $]0,+\infty[$.

Piste 2

On a :

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \preceq \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{n}} \Longleftrightarrow \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{n}} \geqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k^2}}{n}$$

$$\Longleftrightarrow f\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{n}\right) \geqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} f(x_k^2)}{n}$$

où $f : t \longmapsto \sqrt{t}$

Ce qui est vrai car f est concave sur $]0,+\infty[$, et les x_k^2 y appartiennent et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$.

$\square$

Exercice 3 :

Considérons la fonction

$$f: \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(\ln x) \end{array}$$

1) Montrer que f est concave.
2) En déduire que

$$\forall x, y \in]1,+\infty[, \ \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \succeq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$$

Solution

1) Montrer que f est concave.

f est d'abord deux fois dérivable sur $]1,+\infty[$ par opérations sur les fonctions deux fois dérivables.

Et on a : $\boxed{\forall x > 1, \ f''(x) = \frac{-(\ln x + 1)}{(x\ln(x))^2} \leq 0}$

Détails

$f(x) = \ln(\ln x)$

$f'(x) = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x}$

$f''(x) = \left(\frac{1}{x\ln x}\right)'$

$= \frac{-(x\ln x)'}{(x\ln x)^2}$

$= \frac{-(\ln x + 1)}{(x\ln(x))^2} \leq 0$

$(g(f(x)))' = f'(x) \times g'(f(x))$

$(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$\left(\frac{1}{u(x)}\right)' = \frac{-u'(x)}{(u(x))^2}$

$(fg)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

2) En déduire que

$$\forall x, y \in]1, +\infty[, \ \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \succeq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$$

Soient $x, y \in]1, +\infty[$. M.que $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln x \cdot \ln y}$

On a $f : x \longmapsto \ln(\ln x)$ est concave sur $]1, +\infty[$.

Alors $f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \geqslant \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$

$\Rightarrow \ln\left(\ln\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)\right) \geqslant \frac{1}{2}\ln(\ln x) + \frac{1}{2}\ln(\ln y)$

$\Rightarrow \ln\left(\ln\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(\ln(\ln x) + \ln(\ln y)\right)$

$\Rightarrow \ln\left(\ln\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)\right) \geqslant \frac{1}{2}\ln(\ln x \ln y)$

$\Rightarrow \ln\left(\ln\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)\right) \geqslant \ln\left((\ln x \ln y)^{\frac{1}{2}}\right)$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \geqslant (\ln x \ln y)^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \boxed{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln x \cdot \ln y}}$ $\square$

$\boxed{\text{Fin Exercice 3}}$

Exercice 4 :

1) Montrer que :

a) La fonction $x \longmapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ x_1, \cdots, x_n \in]0,+\infty[,\ 1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \preceq \left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)^{\frac{1}{n}}$

2) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a_1, \cdots, a_n \succ 0,\ \forall b_1, \cdots, b_n \succ 0,\ \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{n}} \preceq \left(\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Solution

Exercice 5 :

Soit $(p,q) \in]0,+\infty[^2$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

1) Montrer que :

a) $\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2,\ \sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \preceq \frac{a}{p}+\frac{b}{q}$

b) $\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2,\ ab \preceq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$

Dite inégalité de Young

2) En déduire que

$$\forall\ (a_1,a_2,b_1,b_2) \in]0,+\infty[^4,\ \frac{a_1 b_1}{\sqrt[p]{a_1^p+a_2^p}\sqrt[q]{b_1^q+b_2^q}} \preceq \frac{1}{p}\frac{a_1^p}{a_1^p+a_2^p}+\frac{1}{q}\frac{b_1^q}{b_1^q+b_2^q}$$

3) Conclure alors que

$$\forall\ (a_1,a_2,b_1,b_2) \in]0,+\infty[^4,\ a_1b_1+a_2b_2 \preceq \sqrt[p]{a_1^p+a_2^p}\sqrt[q]{b_1^q+b_2^q}$$

4) Montrer qu'en général, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n) \in]0,+\infty[^{2n},\ \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \preceq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} a_k^p}\sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n} b_k^q}$$

Solution

Soit $(p,q) \in]0,+\infty[^2$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

1) Montrer que :

a) $\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2,\ \sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \preceq \frac{a}{p}+\frac{b}{q}$

Soit $a,b \in]0,+\infty[$. On a :

$$\sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \preceq \frac{a}{p}+\frac{b}{q} \iff \ln\left(\sqrt[p]{a}\ \sqrt[q]{b}\right) \leqslant \ln\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{p}\right)$$

$$\iff \ln\left(\sqrt[p]{a}\right)+\ln\left(\sqrt[q]{b}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{p}\cdot a+\frac{1}{q}\cdot b\right)$$

$$\iff \ln\left(a^{\frac{1}{p}}\right)+\ln\left(b^{\frac{1}{q}}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{p}\cdot a+\frac{1}{q}\cdot b\right)$$

$$\iff \ln\left(\frac{1}{p}\cdot a+\frac{1}{q}\cdot b\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln(a)+\frac{1}{q}\ln(b)$$

Ce qui est vrai, car $\ln$ est concave sur $]0,+\infty[$ et que $\begin{cases} \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \\ \frac{1}{p}\geqslant 0 \text{ et } \frac{1}{q}\geqslant 0 \end{cases}$

D'où $\sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \preceq \frac{a}{p}+\frac{b}{q}$

$\square$

b) $\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2,\ ab \preceq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Soient $a, b \in]0,+\infty[$. M.q. $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Dans $\sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \preceq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$ dans la question a), on remplace a par a^p et b par b^q, et on conclut.

On a : $\sqrt[p]{a^p} \cdot \sqrt[q]{a^p} \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

$$\Rightarrow \boxed{ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}}, \text{ car } \sqrt[p]{a^p} = a \text{ et } \sqrt[q]{b^q} = b.$$

$\square$

---

2) En déduire que

$$\forall\ (a_1, a_2, b_1, b_2) \in]0,+\infty[^4,\ \frac{a_1 b_1}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p}\sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}} \preceq \frac{1}{p}\frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p} + \frac{1}{q}\frac{b_1^q}{b_1^q + b_2^q}$$

Soient $a_1, a_2, b_1, b_2 \in]0,+\infty[$. On a :

$$\sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \preceq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

$$ab \preceq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

$$\frac{a_1 b_1}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p}\sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}} = \frac{a_1}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p}} \times \frac{b_1}{\sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}}$$

$$\leqslant \frac{1}{p}\cdot\left(\frac{a_1}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p}}\right)^p + \frac{1}{q}\cdot\left(\frac{b_1}{\sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}}\right)^q$$

$$= \frac{1}{p}\frac{a_1^p}{\left(\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p}\right)^p} + \frac{1}{q}\cdot\frac{b_1^q}{\left(\sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}\right)^q}$$

$$= \frac{1}{p}\frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p} + \frac{1}{q}\frac{b_1^q}{b_1^q + b_2^q}$$

$\square$

On a :

$$\frac{a_1 b_1}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p}\sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}} \preceq \frac{1}{p}\frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p} + \frac{1}{q}\frac{b_1^q}{b_1^q + b_2^q}$$

D'où

$$\frac{a_2 b_2}{\sqrt[p]{a_2^p + a_1^p}\sqrt[q]{b_2^q + b_1^q}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{a_2^p}{a_2^p + a_1^p} + \frac{1}{q}\frac{b_2^q}{b_2^q + b_1^q}$$

Par sommation :

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt[p]{a_2^p + a_1^p}\sqrt[q]{b_2^q + b_1^q}} \leqslant \underbrace{\frac{1}{p}\cdot\underbrace{\frac{a_1^p + a_2^p}{a_2^p + a_1^p}}_{=1} + \frac{1}{q}\underbrace{\frac{b_1^q + b_2^q}{b_2^q + b_1^q}}_{=1}}_{=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt[p]{a_2^p + a_1^p}\sqrt[q]{b_2^q + b_1^q}} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_1 b_1 + a_2 b_2 \leqslant \sqrt[p]{a_2^p + a_1^p}\sqrt[q]{b_2^q + b_1^q}}$$

$\square$

La suite ⟶ après