Arithmétique

Exercice 1 :

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :
   a) $(x-1) \mid (x+3)$
   b) $(x+2) \mid (x^2+2)$
2) Soit n un entier impair. Montrer que $n^2 \equiv 1[8]$

Exercice 2 :

1) Montrer que $11 \mid (2^{123}+3^{121})$
2) Déterminer le reste de la division euclidienne de $(1234^{4321}+4321^{1234})$ par 7.

Exercice 3 :

1) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1) \wedge (2n+1) = 1$$
2) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ (n+1) \mid C_{2n}^{n}$$

Exercice 4 :

1) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists!(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2, \ \left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$
2) Montrer que $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$
3) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n \wedge b_n = 1$$

Exercice 5 :

Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

1. Soit $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ un polynôme à coéfficients dans $\mathbb{Z}$.
   Soit $r \in \mathbb{Q}$ une racine de P. Montrer que $r \in \mathbb{Z}$.
2. (Critère d'Eisenstein)

(a) Soit $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ un polynôme à coéfficients dans $\mathbb{Z}$.
Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$; où $p \wedge q = 1$.
Montrer que si r est une racine de P, alors p divis a_0 et q divise a_n.

(b) Déterminer alors toutes les racines du polynôme :

$$P(x) = -2 + 15x - 37x^2 + 30x^3$$

Exercice 6 :

1. Soient $a, p \succeq 2$. Montrer que

$$(a^p - 1) \text{ } premier \Rightarrow (a = 2 \text{ } ou \text{ } p \text{ } premier)$$

2. Notons pour tout nombre premier p, $M_p = 2^p - 1$.
Ce sont les nombres de *Mersenne*. Montrer que les nombres de Mersenne sont deux à deux premiers entr eux.

Exercice 7 : (Problème de Bezout)

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. Considérons l'équation (E) $ax + by = c$, d'inconnes x et y dans $\mathbb{Z}$.

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $33x + 24y = 3$.
2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (E) possède au moins une solution.
3) Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ une solution particulière de (E).
Déterminer toutes ses solutions (x, y) en fonction de a, b, x_0, y_0 *et* $d = a \wedge b$.
4) Résoudre alors l'équation $95x + 71y = 46$

Exercice 1 :

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

 a) $(x-1) \mid (x+3)$

 b) $(x+2) \mid (x^2+2)$

2) Soit n un entier impair. Montrer que $n^2 \equiv 1[8]$

Solution

1) a) Déterminons les $x \in \mathbb{Z}$ tels que $(x-1) \mid (x+3)$.

Piste 1

Soit $x \in \mathbb{Z}$.

$$
\begin{aligned}
(x-1) \mid (x+3) &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ (x+3) = k(x-1) \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x+3 = kx - k \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ kx - x = 3 + k \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x(k-1) = 3 + k \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}\setminus\{1\},\ x(k-1) = 3 + k \\
&\quad (\text{Car } k = 1 \Rightarrow 4 = 0,\ \text{absurde}) \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}\setminus\{1\},\ x = \frac{k+3}{k-1} \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}\setminus\{1\},\ x = \frac{k-1+4}{k-1} \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}\setminus\{1\},\ x = 1 + \frac{4}{k-1}
\end{aligned}
$$

D'autre part, on a

$$x = 1 + \frac{4}{k-1} \Longrightarrow \frac{4}{k-1} \in \mathbb{Z}, \text{ car } x \text{ et } 1 \in \mathbb{Z}.$$

$$\Longrightarrow (k-1) / 4$$

$$\Longrightarrow (k-1) \in \{-1, -2, -4, 1, 2, 4\}$$

$$\Longrightarrow k \in \{0, -1, -3, 2, 3, 5\}$$

D'où :

$$(x-1) / (x+3) \Longleftrightarrow \exists\, k \in \{0, -1, -3, 2, 3, 5\} \,/\, x = 1 + \frac{4}{k-1}$$

$$\Longleftrightarrow x \in \{-3, -1, 0, 5, 3, 2\}$$

$$\boxed{S = \{-3, -1, 0, 5, 3, 2\}}$$

$\square$

Piste 2

Soit $x \in \mathbb{Z}$.

$$(x-1) / (x+3) \Longleftrightarrow \begin{cases} (x-1) / (x+3) \\ (x-1) / (x-1) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow (x-1) / ((x+3) - (x-1))$$

$$\Longleftrightarrow (x-1) / 4$$

$$\Longleftrightarrow (x-1) \in \{1, 2, 4, -1, -2, -4\}$$

$(x-1) / (x+3) \iff x \in \{2, 3, 5, 0, -1, -3\}$

$$\boxed{S = \{2, 3, 5, 0, -1, -3\}}$$

$\square$

b) Déterminons les $x \in \mathbb{Z}$ tels que $(x+2) \mid (x^2+2)$

Soit $x \in \mathbb{Z}$.

$(x+2) / (x^2+2) \iff \begin{cases} (x+2) / (x^2+2) \\ (x+2) / (x^2-4) \end{cases}$ (on vise à se débarasser de x^2)

$\iff (x+2) / \left((x^2+2) - (x^2-4)\right)$

$\iff (x+2) / 6$

$\iff (x+2) \in \{1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6\}$

$\iff x \in \{-1, 0, 1, 4, -3, -4, -5, -8\}$

$$\boxed{S = \{-1, 0, 1, 4, -3, -4, -5, -8\}}$$

2) Soit n un entier impair. Montrer que $n^2 \equiv 1[8]$

n impair $\implies (\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k+1)$

D'où $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$\Longrightarrow \quad n^2 = 4k(k+1) + 1$

Or $k(k+1)$ est pair

d'où $(\exists l \in \mathbb{Z},\ k(k+1) = 2l)$

Par suite $n^2 = 8l + 1$

Enfin : $\boxed{n^2 \equiv 1\ [8]}$ $\square$

Fin Exercice 1

Exercice 2 :

1) Montrer que $11 \mid (2^{123}+3^{121})$

2) Déterminer le reste de la division euclidienne de $(1234^{4321}+4321^{1234})$ par 7.

Solution

1) Montrer que $11 \mid (2^{123}+3^{121})$

(Petit théorème de Fermat)

Soit q un nombre premier.

$\forall a \in \mathbb{N}^*, \quad q \wedge a = 1 \Rightarrow a^{q-1} \equiv 1 \, [q]$

On veut montrer que $(2^{123}+3^{121}) \equiv 0 \, [11]$

On a $\begin{cases} 11 \text{ nombre premier} \\ 2 \wedge 11 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2^{10} \equiv 1 \, [11]$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \; 2^{10n} \equiv 1 \, [11]$ (car $1^n = 1$)

$2^{123} = 2^{120} \times 2^3$

$2^{120} \equiv 1 \, [11] \Rightarrow 2^{120} \times 2^3 \equiv 2^3 \, [11]$

D'où $2^{123} \equiv 8 \, [11]$

On a de même :

$$\begin{cases} 11 \text{ nombre premier} \\ 3 \wedge 11 = 1 \end{cases} \Longrightarrow 3^{10} \equiv 1 \, [11]$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \; 3^{10n} \equiv 1 \, [11]$$

$$3^{121} = 3^{120} \times 3^{1}$$

$$3^{120} \equiv 1 \, [11] \Longrightarrow 3^{120} \times 3^{1} \equiv 3 \, [11]$$

D'où $3^{121} \equiv 3 \, [11]$

Ainsi : $\begin{cases} 2^{123} \equiv 8 \, [11] \\ 3^{121} \equiv 3 \, [11] \end{cases}$

D'où $2^{123} + 3^{121} \equiv 11 \, [11]$

$$\Longrightarrow \boxed{\left(2^{123} + 3^{121}\right) \equiv 0 \, [11]}$$

CQFD

2) Déterminer le reste de la division euclidienne de $(1234^{4321} + 4321^{1234})$ par 7.

(Petit théorème de Fermat)

Soit q un nombre premier.

$\forall a \in \mathbb{N}^*,\ q \wedge a = 1 \Rightarrow a^{q-1} \equiv 1\ [q]$

Il s'agit de déterminer le nombre $0 \leq r < 7$ tel que :

$$\left(1234^{4321} + 4321^{1234}\right) \equiv r\ [7]$$

On a $\begin{pmatrix} 1234 \wedge 7 = 1 \\ 7 \text{ nombre premier} \end{pmatrix} \Rightarrow 1234^6 \equiv 1\ [7]$

Et on a $4321 = 6 \times 720 + 1$

$$1234^6 \equiv 1\ [7] \Rightarrow 1234^{6\times 720} \equiv 1\ [7]$$

$$\Rightarrow 1234^{6\times 720} \times 1234^1 \equiv 1234^1\ [7]$$

$$\Rightarrow 1234^{4321} \equiv 1234\ [7]$$

Et on a $1234 = 7 \times 176 + 2 \Rightarrow 1234 \equiv 2\ [7]$

$$\Rightarrow \boxed{1234^{4321} \equiv 2\ [7]}$$

On a de même : $4321^6 \equiv 1\ [7]$

$1234 = 6 \times 205 + 4$

$4321^{6\times 205} \equiv 1\ [7]$

$4321^{6\times 205} \times 4321^4 \equiv 4321^4\ [7]$

$4321^{1234} \equiv 4321^4\ [7]$

$4321 \equiv 2\ [7] \Rightarrow 4321^4 \equiv 2^4\ [7]$

$\Rightarrow 4321^4 \equiv 2\ [7]$

$\Rightarrow \boxed{4321^{1234} \equiv 2\ [7]}$

Or $\boxed{1234^{4321} \equiv 2\ [7]}$

D'où $\left(1234^{4321} + 4321^{1234}\right) \equiv 4\ [7]$

C/c : $\boxed{4 \text{ est le reste voulu.}}$

Fin Exercice 2

Exercice 3 :

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1) \wedge (2n+1) = 1$$

2) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ (n+1) \mid C_{2n}^{n}$$

Solution

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1) \wedge (2n+1) = 1$$

Passons à Bezout.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a : $2 \times (n+1) + (-1) \times (2n+1) = 1$

Alors d'après le théorème de Bezout, $\boxed{(n+1) \wedge (2n+1) = 1}$. □

2) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ (n+1) \mid C_{2n}^{n}$$

On a $(n+1) C_{2n+1}^{n+1} = (2n+1) C_{2n}^{n}$

$\left(k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1} \right)$

$\Longrightarrow (n+1) \,/\, (2n+1) C_{2n}^{n}$

Gauss $\Longrightarrow (n+1) \,/\, C_{2n}^{n}$, car $(n+1) \wedge (2n+1) = 1$

Fin Exercice 3

Exercice 4 :

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists!(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2,\ \left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

2) Montrer que $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$

3) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \wedge b_n = 1$$

Solution

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists!(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2,\ \left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

i) Unicité

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons l'existence de (a_n, b_n) et $(a'_n, b'_n) \in \mathbb{N}^2$ tels que :

$$\begin{cases} (1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \\ (1+\sqrt{2})^n = a'_n + b'_n\sqrt{2} \end{cases}$$

Et montrons que $(a_n, b_n) = (a'_n, b'_n)$, càd que $\begin{cases} a_n = a'_n \\ b_n = b'_n \end{cases}$.

On a $\begin{cases} (1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \\ (1+\sqrt{2})^n = a'_n + b'_n\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow a_n + b_n\sqrt{2} = a'_n + b'_n\sqrt{2}$

$$\Rightarrow (a_n - a'_n) = (b'_n - b_n)\sqrt{2}$$

On a $b'_n - b_n = 0$, car sinon on aurait : $\sqrt{2} = \dfrac{a_n - a'_n}{b'_n - b_n}$

ce qui est absurde, car $\begin{cases} \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \\ \text{et} \\ \dfrac{a_n - a'_n}{b'_n - b_n} \in \mathbb{Q} \end{cases}$

D'où $\boxed{b_n = b'_n}$, et par suite $\boxed{a_n = a'_n}$. □

ii) Existence

Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2, (1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

Méthode 1

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

Pour $n = 0$,

On a $(1+\sqrt{2})^0 = 1 = a_0 + b_0\sqrt{2}$, où $\begin{cases} a_0 = 1 \in \mathbb{N} \\ b_0 = 0 \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons l'existence de $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

Montrons l'existence de $(a_{n+1}, b_{n+1}) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$(1+\sqrt{2})^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2}$$

On a :

$$(1+\sqrt{2})^{n+1} = (1+\sqrt{2})^n \times (1+\sqrt{2})$$

$$= (a_n + b_n\sqrt{2}) \times (1+\sqrt{2}) \quad \left(\text{par hypothèse de récurrence}\right)$$

$$= (a_n + 2b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{2}$$

$$= a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2}, \text{ où } \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \in \mathbb{N} \\ b_{n+1} = a_n + b_n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Enfin : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2, (1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}}$

$\square$

Méthode 2

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrons l'existence de $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

On a :

$$(1+\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\sqrt{2})^k$$

$$= \sum_{0 \leq 2k \leq n} C_n^{2k} (\sqrt{2})^{2k} + \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} C_n^{2k+1} (\sqrt{2})^{2k+1}$$

$$= \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} C_n^{2k} 2^k + \sum_{-1 \leq 2k \leq n-1} C_n^{2k+1} 2^k . \sqrt{2}$$

$$= \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} C_n^{2k} 2^k + \left(\sum_{0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}} C_n^{2k+1} 2^k \right) \sqrt{2}$$

$$= a_n + b_n \sqrt{2}$$

où $\begin{cases} a_n = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} C_n^{2k} 2^k \in \mathbb{N} \\ b_n = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}} C_n^{2k+1} 2^k \in \mathbb{N} \end{cases}$

$\square$

2) Montrer que $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$

Méthode 1

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation

Pour $n=0$.

On a $a_0^2 - 2b_0^2 = 1$, car $\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \end{cases}$

et $(-1)^0 = 1$

D'où $a_0^2 - 2b_0^2 = (-1)^0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supp que $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$, et montrons

que $a_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

On a :

$$a_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2 = (a_n + 2b_n)^2 - 2(a_n + b_n)^2 \quad \text{car} \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

$$= a_n^2 + \cancel{4a_nb_n} + 4b_n^2 - 2(a_n^2 + \cancel{2a_nb_n} + b_n^2)$$

$$= -a_n^2 + 2b_n^2$$

$$= -(a_n^2 - 2b_n^2)$$

$$= (-1)^{n+1} \quad \text{car } a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$$

Enfin : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ a_n^2-2b_n^2=(-1)^n}$

Méthode 2

Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :

$$a_n^2-2b_n^2=(a_n-\sqrt{2}\,b_n)(a_n+\sqrt{2}\,b_n).$$

$$=(a_n-\sqrt{2}\,b_n)\times(1+\sqrt{2})^n \qquad (1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$$

On montrera ci-après que : $(a_n-\sqrt{2}\,b_n)=(1-\sqrt{2})^n$.

Ainsi :

$$a_n^2-2b_n^2=(1-\sqrt{2})^n\times(1+\sqrt{2})^n=\left((1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})\right)^n=(-1)^n$$

$\square$

Montrons maintenant que : $\left(\forall n\in\mathbb{N},\ (a_n-\sqrt{2}\,b_n)=(1-\sqrt{2})^n\right)$

Méthode 1 (Par récurrence)

Pour $n=0$ (OK) $\begin{cases}a_0=1\\ b_0=0\end{cases}$

Soit $n\in\mathbb{N}$.

Supp que $a_n-\sqrt{2}\,b_n=(1-\sqrt{2})^n$ et M que $a_{n+1}-\sqrt{2}\,b_{n+1}=(1-\sqrt{2})^{n+1}$

On a : $a_{n+1}-\sqrt{2}\,b_{n+1}=(a_n+2b_n)-\sqrt{2}(a_n+b_n)$ car : $\begin{cases}a_{n+1}=a_n+2b_n\\ b_{n+1}=a_n+b_n\end{cases}$

$$=(1-\sqrt{2})a_n+(2-\sqrt{2})b_n$$

$$= (1-\sqrt{2})a_n + \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)b_n$$

$$= (1-\sqrt{2})(a_n - \sqrt{2}\, b_n)$$

$$= (1-\sqrt{2}).(1-\sqrt{2})^n \quad \text{(hypothèse de récurrence)}$$

$$= (1-\sqrt{2})^{n+1}$$

$\square$

Méthode 2

binôme de Newton, tout comme $(1+\sqrt{2})^n$

$$(1-\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k . \sqrt{2}^k$$

$$= \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} C_n^{2k} . (-1)^{2k} . (\sqrt{2})^{2k} + \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} C_n^{2k+1} . (-1)^{2k+1} . (\sqrt{2})^{2k+1}$$

$$= \sum_{0 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}} C_n^{2k} 2^k - \sum_{-1 \leqslant 2k \leqslant n-1} C_n^{2k+1} 2^k . \sqrt{2}$$

$$= \underbrace{\sum_{0 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}} C_n^{2k} 2^k}_{= a_n} - \underbrace{\left(\sum_{0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}} C_n^{2k+1} 2^k \right)}_{= b_n} \sqrt{2}$$

$$= a_n - b_n \sqrt{2}$$

$\square$

---

3) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \wedge b_n = 1$$

On a : $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n\right)$

$\Rightarrow \quad a_n \times (-1)^n a_n + b_n \times (-2b_n) \times (-1)^n = 1$

Et on conclut d'après le théorème de Bezout que $a_n \wedge b_n = 1$

$\square$

Fin Exercice 4

Exercice 5 :

Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

1. Soit $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ un polynôme à coéfficients dans $\mathbb{Z}$.
   Soit $r \in \mathbb{Q}$ une racine de P. Montrer que $r \in \mathbb{Z}$.
2. (Critère d'Eisenstein)

(a) Soit $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ un polynôme à coéfficients dans $\mathbb{Z}$.
Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$; où $p \wedge q = 1$.
Montrer que si r est une racine de P, alors p divis a_0 et q divise a_n.

(b) Déterminer alors toutes les racines du polynôme :

$$P(x) = -2 + 15x - 37x^2 + 30x^3$$

Solution

1. Soit $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ un polynôme à coéfficients dans $\mathbb{Z}$.
   Soit $r \in \mathbb{Q}$ une racine de P. Montrer que $r \in \mathbb{Z}$.

On a : $(\forall 0 \leq i \leq n-1,\ a_i \in \mathbb{Z})$.

Notons $r = \frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, avec $p \wedge q = 1$.

On a $P(r) = 0$, et on veut montrer que $r \in \mathbb{Z}$.

Il suffit de montrer que $q = 1$.

$$P(r) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 r + \cdots + a_{n-1} r^{n-1} + r^n = 0$$

$$\Rightarrow a_0 + a_1 \cdot \frac{p}{q} + \cdots + a_{n-1} \cdot \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \frac{p^n}{q^n} = 0$$

Multiplions partout par q^n. On obtient :

$p \wedge q = 1$

$\Rightarrow a_0 q^n + a_1 p \cdot q^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p^{n-1} \cdot q + p^n = 0$

$\Rightarrow a_0 q^n + a_1 p \cdot q^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p^{n-1} \cdot q = -p^n$

$\Rightarrow q \,/\, (-p^n)$

Or $p \wedge q = 1$, alors $p^n \wedge q = 1$

d'où d'après le théorème de Gauss, on a $q \,/\, (-1)$.

$\Rightarrow q = \pm 1$

$\Rightarrow q = 1$, car $q \in \mathbb{N}^*$

Enfin $r = p$, et donc $\boxed{r \in \mathbb{Z}}$

$\square$

---

2. (Critère d'Eisenstein)

(a) Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ un polynôme à coéfficients dans $\mathbb{Z}$.
Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$; où $p \wedge q = 1$.
Montrer que si r est une racine de P, alors p divis a_0 et q divise a_n.

Soit $r = \dfrac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$.

Supp que $P(r) = 0$, et Mq que p / a_0 et q / a_n.

On a $P(r) = 0 \Longrightarrow a_0 + a_1 r + \cdots + a_{n-1} r^{n-1} + a_n r^n = 0$

$$\Rightarrow a_0 + a_1 \frac{p}{q} + \cdots + a_{n-1} \cdot \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_n \cdot \frac{p^n}{q^n} = 0$$

En multipliant par q^n, on obtient :

$$a_0 q^n + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + a_n \cdot p^n = 0$$

i) M que p / a_0 :

On a $a_0 q^n + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + a_n \cdot p^n = 0$

$$\Rightarrow a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + a_n \cdot p^n = -a_0 q^n$$

$$\Rightarrow p\left(a_1 q^{n-1} + \cdots + a_n \cdot p^{n-1}\right) = -a_0 \cdot q^n$$

$$\Rightarrow p / \left(-a_0 \cdot q^n\right)$$

Or $p \wedge q = 1$, alors $p \wedge q^n = 1$

Alors d'après le théorème de Gauss, on tire que $p / (-a_0)$

Et donc $\boxed{p / a_0}$.

ii) M que q / a_n :

On a $a_0 q^n + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + a_n \cdot p^n = 0$

$$\Rightarrow a_0 q^n + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q = -a_n p^n$$

$\Rightarrow q \,/\, (-a_n p^n)$

Or $q \wedge p = 1$, alors $q \wedge p^n = 1$

Alors d'après le théorème de Gauss, on tire que $q \,/\, (-a_n)$

Et donc $\boxed{q \,/\, a_n}$.

$\square$

(b) Déterminer alors toutes les racines du polynôme :

$$P(x) = -2 + 15x - 37x^2 + 30x^3$$

P est de degré 3.

Si on arrive à lui trouver une racine r, alors peut tirer les autres racine en effectuant la division euclidienne de P par $(x - r)$ et via le discriminent Δ.

Déterminons un racine rationnelle r.

Posons $r = \frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$.

D'après 2)a), on a $\begin{cases} p / a_0 \\ q / a_3 \end{cases}$, càd $\begin{cases} p / (-2) \\ q / 30 \end{cases}$

$\Rightarrow p \in \{\pm 1, \pm 2\}$ et $q \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

« $30 = 2 \times 3 \times 5$ et $q \in \mathbb{N}^*$ »

Or $r = \frac{p}{q}$ et que $p \wedge q = 1$.

Alors $r \in \left\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{1}{6}, \dots \right\}$

$$P(x) = -2 + 15x - 37x^2 + 30x^3$$

On a $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ (faites vos calculs).

Alors $-2+15x-37x^2+30x^3 = \left(x-\frac{1}{2}\right)(ax^2+bx+c)$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
30x^3 & -37x^2 & +15x & -2 & x-\frac{1}{2} \\
\hline
-\ (30x^3 & -15x^2) & & & 30x^2-22x+4 \\
\hline
 & -22x^2 & +15x & -2 & \\
 & -\ (-22x^2 & +11x) & & \\
\hline
 & & 4x & -2 & \\
 & & -\ (4x & -2) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

D'où $P(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(30x^2-22x+4\right)$

Les racines de $30x^2-22x+4$ via Δ :

$\Delta = 4$;

$$x_1 = \frac{22-\sqrt{4}}{2\times 30} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{22+\sqrt{4}}{2\times 30} = \frac{2}{5}$$

Les racines du polynôme $P(x) = -2 + 15x - 37x^2 + 30x^3$ sont :

$$\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3} \text{ et } \frac{2}{5}$$

Fin Exercice 5

Exercice 7 : (Problème de Bezout)
Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. Considérons l'équation (E) $ax + by = c$, d'inconnes x et y dans $\mathbb{Z}$.

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $33x + 24y = 3$.

On détermine d'abord $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $33x_0 + 24y_0 = 3$
Vu que $33 \wedge 24 = 3$. (on trouve $x_0 = 3$, $y_0 = -4$ convienent)

Soit maintenant $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. On a :

$$33x + 24y = 3 \iff 33x + 24y = 33x_0 + 24y_0$$
$$\iff 33(x - x_0) = 24(y_0 - y)$$
$$\iff 11(x - x_0) = 8(y_0 - y) \quad (*)$$
$$\Rightarrow 8 \mid 11(x - x_0) \quad \text{(juste une implication)}$$
$$\Rightarrow 8 \mid (x - x_0) \quad (\text{car } 8 \wedge 11 = 1 \text{ et via Gauss})$$
$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ x - x_0 = 8k)$$
$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ x = x_0 + 8k)$$

Remplaçons dans $(*)$, on aura : $11 \times 8k = 8(y_0 - y)$

$$\Rightarrow y_0 - y = 11k$$
$$\Rightarrow y = y_0 - 11k$$

Ainsi Si (x, y) est solution alors :

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ (x, y) = (x_0 + 8k, y_0 - 11k)$$

Réciproquement :

Soit $(x,y)=(x_0+8k, y_0-11k)$, où $k\in\mathbb{Z}$.

(x,y) est solution de l'équation car :

$$33x+24y = 33(x_0+8k)+24(y_0-11k)$$

$$= \underbrace{(33x_0+24y_0)}_{=3} + \underbrace{(33\times 8-24\times 11)}_{=0}k$$

$$=3$$

Enfin :

$$S=\{(3+8k, -4-11k) \,/\, k\in\mathbb{Z}\}$$

où S l'ensemble des solutions de l'équation :

$$\boxed{33x+24y=3 \;;\; (x,y)\in\mathbb{Z}^2}$$

La suite à venir