Correction

Partie I

1. Si $ab = ba$ alors $[a,b] = 0$.

2.a $[b,a] = -[a,b]$.

2.b $[a,b+c] = a(b+c)-(b+c)a = ab-ba+ac-ca = [a,b]+[a,c]$.

2.c $[a,[b,c]] = abc-acb-bca+cba$ etc…

3. On remarque que $d_a(x) = [a,x]$.
$d_a(x+y) = [a,x+y] = [a,x]+[a,y] = d_a(x)+d_a(y)$.
$d_a(xy) = axy - xya$, $xd_a(y)+d_a(x)y = xay - xya + axy - xay = axy - xya$ donc
$d_a(xy) = xd_a(y)+d_a(x)y$.

Partie II

1. $\delta(0) = \delta(0+0) = \delta(0)+\delta(0)$ donc $\delta(0) = 0$.
$\delta(1) = \delta(1\times 1) = 1\times\delta(1)+\delta(1)\times 1 = 2\delta(1)$ donc $\delta(1) = 0$.

2.a $\delta(0) = \delta(x)+\delta(-x)$ donc $\delta(-x) = -\delta(x)$.

2.b $\delta(1) = x\delta(x^{-1})+\delta(x)x^{-1}$ donc $\delta(x^{-1}) = -x^{-1}\delta(x)x^{-1}$.

3.a $\delta(x_1x_2\ldots x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_1\ldots x_{k-1}\delta(x_k)x_{k+1}\ldots x_n$.

3.b $\delta(x^n) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}\delta(x)x^{n-k}$.
Si x et $\delta(x)$ commutent : $\delta(x^n) = nx^{n-1}\delta(x)$.

4.a C_δ, $1\in C_\delta$, $\forall x,y\in C_\delta$, $\delta(x-y) = \delta(x)-\delta(y) = 0$ et $\delta(xy) = x\delta(y)+\delta(x)y = 0$ donc $x-y, xy\in C_\delta$.

4.b $\forall x\in C_\delta\setminus\{0\}$, $\delta(x^{-1}) = -x^{-1}\delta(x)x^{-1} = 0$ donc $x^{-1}\in C_\delta$.

Partie III

1.a Oui et on le vérifie sans peine.

1.b Non, par exemple dans le cadre de l'anneau des fonctions d'une variable réelle dérivable, la composée de la dérivation usuelle avec elle-même donne la dérivation seconde, qui n'est pas une dérivation (problème pour la formule (2)).

1.c Sans peine $[\delta_1,\delta_2](x+y) = [\delta_1,\delta_2](x)+[\delta_1,\delta_2](y)$.
$[\delta_1,\delta_2](xy) = \delta_1(\delta_2(xy)) - \delta_2(\delta_1(x,y)) = \delta_1(x\delta_2(y)+\delta_2(x)y) - \delta_2(x\delta_1(y)+\delta_1(x)y)$ donne après simplification de termes $\delta_2(x)\delta_1(y), \delta_1(x)\delta_2(y)$:
$[\delta_1,\delta_2](xy) = x\delta_1(\delta_2(y)) + \delta_1(\delta_2(x))y - x\delta_2(\delta_1(y)) - \delta_2(\delta_1(x))y$.
Or ceci correspond à $x[\delta_1,\delta_2](y)+[\delta_1,\delta_2](x)y$ comme voulu.

2.a $[\delta,d_a](x) = \delta(ax-xa) - a\delta(x)+\delta(x)a = \delta(a)x - x\delta(a)$ après simplification de termes $a\delta(x)$ et $\delta(x)a$.
Ainsi $[\delta,d_a](x) = d_{\delta(a)}(x)$ et puisque ceci vaut pour tout $x\in A$: $[\delta,d_a] = d_{\delta(a)}$.

2.b $[d_a,d_b] = d_{d_a(b)} = d_{[a,b]}$.