Topologie 2

Exercice 1

$||.||_1$ et $||.||_2$ deux normes sur E.
B_1 et B_2 les boules unités fermées respectives. Montrer que

$$B_1 = B_2 \Leftrightarrow ||.||_1 = ||.||_2$$

Exercice 2

Montrer que la matrice nulle est un point adhérant à la partie $GL_n(\mathbb{K})$ de $M_n(\mathbb{K})$

Exercice 3 :

E un evn et F en est un sev. Montrer que :

1) F est un ouvert de E $\Leftrightarrow$ E=F

2) F est d'intérieur non vide $\Leftrightarrow$ E=F

Exercice 4 :

Montrer que $\mathbb{Z}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$ par trois méthodes :

1) $\mathbb{Z}^c$ est un ouvert

2) Via la caractérisation séquentielle d'un fermé

3) $\mathbb{Z}$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue

Exercice 5 :

Soit E un evn.
Montrer que l'adhérence d'un sev de E est aussi un sev de E.

Exercice 6 :

Soit A une partie convexe d'un evn E. Montrer que son adhérence et son intérieur sont aussi des parties convexes de E.

Exercice 7 :

E et F deux evn, et $f : E \to F$ une application continue et bornée sur E.
Soit A une partie non vide de E. Montrer que $||f||_A = ||f||_{\overline{A}}$; où

$$||f||_A = sup_{x\in A}||f(x)|| \ et \ ||f||_{\overline{A}} = sup_{x\in \overline{A}}||f(x)||$$

Exercice 8 :

Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est une partie dense de $M_n(\mathbb{K})$.
Indice : $(A - \lambda I_n) \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \lambda \notin S_p(A)$

Exercice 9 :

E un evn et H un hyperplan de E.
Montrer que H est un fermé ou une partie dense de E.

Exercice 10 :

Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$

Exercice 11 :
E un evn de dimension finie.
S (resp P) L'ensemble des symétries (resp projecteurs) sur E.
Montrer que S et P sont des parties fermées de L(E).

Exercice 12 :
$D_n(\mathbb{C})$: L'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$.
Montrer que $D_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 13 :

1) Montrer que l'application suivante est continue

$$\Phi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}_n[X] \text{ , } A \mapsto \chi_A$$

2) Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\forall A \in GL_n(\mathbb{C}), \chi_{AB} = \chi_{BA}$$

3) En déduire que :

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}), \chi_{AB} = \chi_{BA}$$

Indice : Vous pouvez utiliser la densité de $GL_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$

4) Montrer que l'application suivante est continue :

$$\mathbb{C}_n[X] \times M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}), \ (P, A) \mapsto P(A)$$

5) Montrer que pour toute matrice diagonalisable A, on a $\chi_A(A) = 0$
6) En déduire le fameux théorème de Cayley-Hamilton :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \chi_A(A) = 0$$

Indice : Vous pouvez utiliser la densité de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$

Exercice 14 :
Soit E un evn de dimension quelconque, et soit u un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall x \in E, \ ||u(x)|| \preceq ||x||$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} u^i$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, simplifier $v_n o(u - I_E)$
2) Montrer que : $Im(u - I_E) \cap ker(u - I_E) = \{0\}$
3) Supposons que E est de dimension finie. Montrer que

$$E = Im(u - I_E) \oplus ker(u - I_E)$$