Séries et Intégrales impropres

Exercice (Extrait de : Centrale 2015)

1) Justifier que la série de terme général $a_n = \frac{1}{n} - \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t}$ converge.

2) i) Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Montrer qu'il existe une constante réelle A telle que

$$H_n \underset{+\infty}{=} \ln n + A + o(1)$$

ii) En déduire que $H_n \sim \ln n$

3) Soit r un entier naturel.
Pour quelles valeurs de r, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ est-elle convergente ?

4) Pour tout couple d'entiers naturels (p, q) et pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, on note

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (\ln t)^q \, dt \text{ et } I^{\varepsilon}_{p,q} = \int_{\varepsilon}^1 t^p (\ln t)^q \, dt$$

i) Montrer que l'intégrale $I_{p,q}$ existe pour tout couple d'entiers naturels (p, q).

ii) Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ \forall \varepsilon \in]0, 1[,\ I^{\varepsilon}_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I^{\varepsilon}_{p,q-1} - \frac{\varepsilon^{p+1}(\ln \varepsilon)^q}{p+1}$$

iii) En déduire que l'on a

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}$$

iv) En déduire une expression de $I_{p,q}$ en fonction des entiers p et q.

5) Soit $x > 0$. Montrer que $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
Dans toute la suite, on notera Γ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} \, dt$.

6) Soit x et α deux réels strictement positifs. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\alpha t} \, dt$ et donner sa valeur en fonction de $\Gamma(x)$ et α^x.

7) Pour (x, y) dans $(\mathbb{R}^{+*})^2$, on définit $\beta(x, y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$.

  i) Justifier l'existence de $\beta(x, y)$ pour tout $x > 0$ et $y > 0$.

  ii) Montrer que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x, y) = \beta(y, x)$.

  iii) Soient $x > 0$ et $y > 0$. Etablir que $\beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y}\beta(x, y)$.

  iv) En déduire que pour $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x, y)$.

8) Montrer que $\beta(x, y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\, du$.

On pourra utiliser le changement de variable $t = \frac{u}{1+u}$.