Arithmétique

Exercice 1 :

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :
   a) $(x-1) \mid (x+3)$
   b) $(x+2) \mid (x^2+2)$
2) Soit n un entier impair. Montrer que $n^2 \equiv 1[8]$

Exercice 2 :

1) Montrer que $11 \mid (2^{123}+3^{121})$
2) Déterminer le reste de la division euclidienne de $(1234^{4321}+4321^{1234})$ par 7.

Exercice 3 :

1) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1) \wedge (2n+1) = 1$$
2) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ (n+1) \mid C_{2n}^n$$

Exercice 4 :

1) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists!(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2, \ \left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$
2) Montrer que $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$
3) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n \wedge b_n = 1$$

Exercice 5 :

Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

1. Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ un polynôme à coéfficients dans $\mathbb{Z}$.
   Soit $r \in \mathbb{Q}$ une racine de P. Montrer que $r \in \mathbb{Z}$.
2. (Critère d'Eisenstein)

(a) Soit $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ un polynôme à coéfficients dans $\mathbb{Z}$.
Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$; où $p \wedge q = 1$.
Montrer que si r est une racine de P, alors p divis a_0 et q divise a_n.

(b) Déterminer alors toutes les racines du polynôme :

$$P(x) = -2 + 15x - 37x^2 + 30x^3$$

Exercice 6 :

1. Soient $a, p \succeq 2$. Montrer que

$$(a^p - 1) \textit{ premier} \Rightarrow (a = 2 \textit{ ou } p \textit{ premier})$$

2. Notons pour tout nombre premier p, $M_p = 2^p - 1$.
Ce sont les nombres de *Mersenne*. Montrer que les nombres de Mersenne sont deux à deux premiers entr eux.

Exercice 7 : (Problème de Bezout)

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. Considérons l'équation (E) $ax + by = c$, d'inconnes x et y dans $\mathbb{Z}$.

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $33x + 24y = 3$.
2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (E) possède au moins une solution.
3) Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ une solution particulière de (E).
Déterminer toutes ses solutions (x, y) en fonction de a, b, x_0, y_0 *et* $d = a \wedge b$.
4) Résoudre alors l'équation $95x + 71y = 46$