Equation fonctionnelle

L'objectif de ce problème est la détermination des applications $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

(1) $\forall x,y\in\mathbb{R}^+, f(x+y)\geq f(x)+f(y)$ (on dit que f est sur-additive),

(2) $\forall x,y\in\mathbb{R}^+, f(xy)=f(x)f(y)$ (on dit que f est multiplicative).

Partie I : Un exemple

Soit α un réel supérieur ou égal à 1.

1. Montrer que pour tout réel $x\geq 0$, $(1+x)^\alpha\geq 1+\alpha x$.

2. En déduire que pour tout $x,y\geq 0$, $(x+y)^\alpha\geq x^\alpha+y^\alpha$.

3. On considère la fonction $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^\alpha$.
   Justifier que f est solution du problème posé.

Partie II : Quelques propriétés

1. Quelles sont les fonctions constantes solutions du problème étudié ?

Désormais f désigne une fonction non constante solution du problème étudié.

2. Montrer que $f(0)=0$, $f(1)=1$.

3.a Etablir : $\forall x\in\mathbb{R}^+,\forall n\in\mathbb{N}, f(x^n)=f(x)^n$.

3.b Etablir aussi : $\forall x\in\mathbb{R}^+, x\neq 0\Rightarrow f(x)\neq 0$ et $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{f(x)}$.

3.c Etablir enfin : $\forall x\in\mathbb{R}^+, x>0\Rightarrow f(x)>0$.

4. Montrer que f est croissante.

Partie III : Détermination des solutions

A nouveau f désigne une fonction non constante solution du problème étudié.

1. Etablir que $\ln f(2)$ est bien défini et que $\ln f(2)\geq \ln 2$.

2. Justifier : $\forall x>0,\exists! q\in\mathbb{Z}$ tel que $2^q\leq x<2^{q+1}$.

3. Soit un réel $x>0$ et p un entier naturel.
   On convient de noter q_p l'unique entier tel que $2^{q_p}\leq x^p<2^{q_p+1}$.

3.a Déterminer la limite du rapport q_p/p quand p tend vers $+\infty$.

3.b En observant l'encadrement $f(2)^{q_p}\leq f(x)^p\leq f(2)^{q_p+1}$,
   justifier : $\dfrac{q_p}{p}\leq\dfrac{\ln f(x)}{\ln f(2)}\leq\dfrac{q_p+1}{p}$.

3.c En déduire que $\dfrac{\ln f(x)}{\ln x}=\dfrac{\ln f(2)}{\ln 2}$.

4. On pose $\alpha=\dfrac{\ln f(2)}{\ln 2}\geq 1$.
   Justifier que pour tout réel $x\geq 0$, $f(x)=x^\alpha$.