Nombres complexes

Exercice 1 :

$\mathbb{U}$ désigne l'ensembles des nombres complexes de modules 1.
Montrer de deux manières différentes que :

1) $\forall z, z' \in \mathbb{U},\ \frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$

2) $\forall z \in \mathbb{U}|\{1\},\ \frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*|\{1\}$. Soit $p \in \mathbb{N}$.
$\mathbb{U}_n$ désignera l'ensembles des racines nèmes de l'unité. Calculer :
1) $S_1 = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$, 2) $S_2 = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^p$, 3) $S_3 = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1|$, 4) $P = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$,

Exercice 3 :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} C_n^k sin(k\theta)$.

2) $\sum_{k=0}^{n} cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} sin(k\theta)$.

3) $\sum_{k=0}^{n} kcos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} ksin(k\theta)$.

Exercice 4 :

Rappelons la notation $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Simplifier :

1) $j(j+1)$, $\frac{j}{j^2+1}$ et $\frac{j+1}{j-1}$

2) $\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$; où $n \succeq 2$.
Indice : Factoriser $k^3 - 1$ en introduisant j.

Exercice 5 :

Soient $n \succeq 2$ et ω une racine nème de l'unité. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k$

Exercice 6 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
1) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$ 2) $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(12+5i) = 0$ 3) $z^n + 1 = 0$
4) $(z+1)^n = (z-1)^n$ 5) $(z+i)^n = (z-i)^n$ 6) $z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$
7) $e^z = -2020$ 8) $e^z = \sqrt{3} + i$

Exercice 7 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier les expressions suivantes :

1) $\left(\frac{3\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+2i}\right)^{25}$, 2) $(1+i)^n + (1-i)^n$, 3) $\frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^3}$,
4) $(1-j)^6$ 5) $\left(\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{2020}$

Exercice 8 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Déterminer les racines nèmes de i et $1+i$.
2) Résoudre l'équation (E) : $z^{2n} - z^n + 1 = 0$.

Exercice 9 :

Posons $\omega = e^{\frac{2\pi i}{7}}$. Calculer les complexes suivants :

$$A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \ et \ B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$$

Indice : Calculer $A+B$ et AB.

Exercice 10 :

Exprimer $cos(3\theta)sin(6\theta)$ en fonction de $cos(\theta)$ et $sin(\theta)$.

Exercice 11 :

Résoudre l'équation suivante sachant qu'elle possède une solution imaginaire pure :

$$(i-1)z^3 - (5i-11)z^2 - (43+i)z + 9 + 37i = 0$$

Exercice 12 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E) $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$
2) Soit z une solution de (E). Posons $x = z + \frac{1}{z}$.
   Montrer que x est solution d'une équation simple à préciser.
3) En déduire une expression algébrique de $cos(\frac{2\pi}{5})$.

Exercice 13 :

1) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ xyz &= 1 \end{cases}$$

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
   a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2cos(\theta)z + 1 = 0$.
   b) Montrer que toute solution de cette équation est aussi solution de l'équation suivante :

$$z^{2n} - 2cos(n\theta)z + 1 = 0$$

Exercice 14 :

Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer que :

1) $|z+z'|^2+|z-z'|^2 = 2\times\left(|z|^2+|z'|^2\right)$.

2) $|z+z'|^2 \leq \left(1+|z|^2\right)\times\left(1+|z'|^2\right)$.

Exercice 15 :

Soient n un élément de $\mathbb{N}-\{0,1\}$ et ω une racine n^{ime} de l'unité. Simplifier :

$S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k\,\omega^k.$, $S_2 = \sum_{0\preceq k\preceq p\preceq n-1} C_p^k\omega^{k+p}$, $S_3 = \sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n$

Exercice 16 :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que :

1) Pour tout complexe z de module différent de 1, on a

$$\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \preceq \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$$

2) Pour tout complexe z. On a

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| \preceq \sum_{k=0}^{n}\frac{|z|^k}{k!}-\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n$$

Exercice 17 :

Calculer en fonction de n la somme : $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\ \sin\left(\frac{k\,\pi}{3}\right)$.

Exercice 18 :

soit$(x,y,n,p)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que $p\leq n$.

1) Réduire la somme $\sum_{k=p}^{n}\cos\left(x+k\,y\right)$.

2) Déduire l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

$$1+\cos(x)+\cos(2\,x)+\cdots+\cos(2020\,x)=0.$$

Exercice 19 :

Résoudre l'équation d'inconnue $\theta\in\mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{2020}\cos^k(\theta)\ \cos(k\theta)=0.$$

Exercice 20 :

1) Linéariser les expressions suivantes : $\cos^5 x$, $\sin^6 x$, $\sin^3 x \cos^2 x$.

2) (a) Déterminer le polynôme P tel que $P(\cos x) = \cos 5x$.

   (b) Déduire la valeur de $\cos \dfrac{\pi}{10}$ puis $\cos \dfrac{\pi}{5}$.

Exercice 21 :

Trouver les nombres complexes z tels que les points d'affixes :

1) z, z^2 et z^3 soient alignés.

2) 1, z, z^2 et z^3 soient cocycliques.

3) z, z^2 et z^3 soient les sommets d'un triangle isocèle.

Exercice 22 :

Soient A, B et C trois points d'un plan complexe muni d'un repère orthonormal direct,d'affixes respectivement a, b et c.

1) Montrer que ABC est un triangle équilatéral direct ssi $a + j\,b + j^2\,c = 0$.

2) Déduire que ABC est un triangle équilatéral indirect ssi $a + j\,c + j^2\,b = 0$.

3) Montrer que ABC est un triangle équilatéral ssi $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Nombres complexes

Exercice 1 :

$\mathbb{U}$ désigne l'ensembles des nombres complexes de modules 1.
Montrer de deux manières différentes que :

1) $\forall z, z' \in \mathbb{U},\ \frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$

2) $\forall z \in \mathbb{U}|\{1\},\ \frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$

Rappels

$z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow (\exists \theta \in \mathbb{R},\ z = e^{i\theta})$

Sol

$\boxed{1)}$ $\forall z, z' \in \mathbb{U},\ \frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$

Soient $z, z' \in \mathbb{U}$. M.q. $\frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$.

Méthode 1

Il s'agit de m.q. : $\overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)} = \frac{z+z'}{1+zz'}$

Rappels

$X \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{X} = X$

$X \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{X} = -X$

On a :

$$\overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)} = \frac{\overline{z+z'}}{\overline{1+zz'}}$$

$$= \frac{\overline{z}+\overline{z'}}{\overline{1}+\overline{zz'}}$$

$$= \frac{\overline{z}+\overline{z'}}{1+\overline{z}\cdot\overline{z'}}$$

$$= \frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{z'}}{1+\frac{1}{zz'}} \quad (\text{car } z \text{ et } z' \in \mathbb{U})$$

$$= \frac{\frac{z+z'}{zz'}}{\frac{1+zz'}{zz'}}$$

$$= \frac{z+z'}{1+zz'} \quad \square$$

Méthode 2

On a $z, z' \in \mathbb{U} \Rightarrow \begin{cases} \exists \theta \in \mathbb{R},\ z = e^{i\theta} \\ \exists \theta' \in \mathbb{R},\ z' = e^{i\theta'} \end{cases}$

Ainsi :

$$\frac{z+z'}{1+zz'} = \frac{e^{i\theta}+e^{i\theta'}}{1+e^{i(\theta+\theta')}}$$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}{2\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)} \in \mathbb{R}$$

Rappels (Règle de l'angle moitié)

$e^{i\theta}+1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

$e^{i\theta}-1 = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

$e^{i\theta}+e^{i\theta'} = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$

$e^{i\theta}-e^{i\theta'} = 2i\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$

À retenir ⚠

$\boxed{2)}$ $\forall z \in \mathbb{U}|\{1\},\ \frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$

Soit $z \in \mathbb{U}\setminus\{1\}$. M.q. $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$

Méthode 1

Il s'agit de m.q. : $\overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = -\frac{z+1}{z-1}$

Rappels

$X \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{X} = X$

$X \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{X} = -X$

On a :

$$\overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = \frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}$$

$$= \frac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1}$$

$$= \frac{\frac{z+1}{z}}{\frac{1-z}{z}}$$

$$= \frac{z+1}{1-z}$$

$$= -\frac{z+1}{z-1} \quad \square$$

Méthode 2

On a $z \in \mathbb{U} \Rightarrow \exists \theta \in \mathbb{R},\ z = e^{i\theta}$

Ainsi

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}$$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}}{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= i \cdot \left(-\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \in i\mathbb{R} \quad \square$$

$\boxed{\text{Fin Exercice 1}}$

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*|\{1\}$. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{U}_n$ désignera l'ensembles des racines nèmes de l'unité. Calculer :

1) $S_1 = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$, 2) $S_2 = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^p$, 3) $S_3 = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1|$, 4) $P = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$.

Solution

$\boxed{1)}$ $S_1 = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2k\pi i}{n}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^k$$

$$= \frac{1 - \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}}$$

$$= \frac{1 - e^{2\pi i}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}}$$

$$= 0 \quad \left(\text{car } e^{2\pi i} = 1\right)$$

Rappels

$z \in \mathbb{U}_n \Leftrightarrow z^n = 1$

$\Leftrightarrow \left(\exists\, 0 \leq k \leq n-1,\ z = e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\exists\, 1 \leq k \leq n,\ z = e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)$

Rappel

Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{s} z^k = 1 + z + \dots + z^s = \frac{1 - z^{s+1}}{1 - z}$$

$\boxed{4)}$ $P = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$

$P = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2k\pi i}{n}}$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^k$$

$$= \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^0 \times \dots \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^{n-1}$$

$$\left(e^{\frac{2\cancel{i}\pi}{\cancel{n}}}\right)^{\frac{\cancel{n}(n-1)}{\cancel{2}}}$$

$$e^{(n-1)\pi i} = (-1)^{n-1}$$

$$e^{n\pi i} = (-1)^n$$

$\boxed{2)}$ $S_2 = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^p$ $(p \in \mathbb{N})$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)^p$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2k\pi p i}{n}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2\pi p i}{n}}\right)^k$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z} \quad \text{si } z \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = n \quad \text{si } z = 1$$

$$\sum_{k=p}^{q} \lambda \underset{\text{si } p \leq q}{=} \lambda(q-p+1)$$

Cas 1 : Si $e^{\frac{2\pi p i}{n}} \neq 1$ (càd n ne divise pas p)

$$S_2 = \frac{1-\left(e^{\frac{2\pi p i}{n}}\right)^n}{1-\left(e^{\frac{2\pi p i}{n}}\right)}$$

$$= \frac{1-e^{\frac{2\pi p n i}{n}}}{1-\left(e^{\frac{2\pi p i}{n}}\right)}$$

$$= \frac{1-e^{2\pi p i}}{1-\left(e^{\frac{2\pi p i}{n}}\right)} \qquad e^{2\pi p i} = 1$$

$$= 0$$

Cas 2 : Si $e^{\frac{2\pi p i}{n}} = 1$ (càd n divise p)

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2\pi p i}{n}}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} 1$$

$$= n$$

$$= \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^{0+1+\cdots+(n-1)}$$

$$= \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$= e^{\frac{\cancel{2}\pi i}{\cancel{n}} \times \frac{\cancel{n}(n-1)}{\cancel{2}}}$$

$$= e^{(n-1)\pi i}$$

$$= (-1)^{n-1}$$

$$e^{k\pi i} = (-1)^k$$

Réflexe

3) $S_3 = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1|$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left| e^{\frac{2k\pi i}{n}} - 1 \right|$$

$$e^{i\theta} - 1 = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Rappel

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left| 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i\frac{k\pi}{n}} \right|$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} 2\left|\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| \; ; \left(\text{car } |i| = 1, \left|e^{i\frac{k\pi}{n}}\right| = 1\right)$$

$$= 2\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \; ; \begin{cases} \text{car } \forall\, 0 \leq k \leq n-1,\ \frac{k\pi}{n} \in [0,\pi] \\ \text{et } \sin \text{ positive sur } [0,\pi] \end{cases}$$

$$= 2\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$= 2\,\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)$$

$$= 2\,\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^{k}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z} \text{ si } z \neq 1$$

Rappel

$$\mathrm{Re}(\underset{\in\mathbb{R}}{\alpha}\, \underset{\in\mathbb{C}}{z}) = \alpha\, \mathrm{Re}(z)$$
$$\mathrm{Im}(\alpha\, z) = \alpha\, \mathrm{Im}(z)$$

$$= 2\,\mathrm{Im}\left(\frac{1-\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^{n}}{1-e^{i\pi/n}}\right)$$

$$= 2\,\mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{i\pi}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}\right)$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$= 4\,\mathrm{Im}\left(\frac{1}{-2i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{i\frac{\pi}{2n}}}\right)$$

$$e^{i\theta}-1 = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Rappel

$$= \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \cdot \mathrm{Im}\left(i\, e^{-i\frac{\pi}{2n}}\right)$$

$$\frac{1}{-i} = i$$

$$= \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \cdot \mathrm{Im}\left(i\left[\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right]\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

$$\sum_{w\in\mathbb{U}_n} |w-1| = 2\cot\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

Rappel: $\cot(x) = 1/\tan(x)$; se lit Cotangente

Exercice 4 :

Rappelons la notation $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Simplifier :

$\boxed{1)}$ $j(j+1)$, $\frac{j}{j^2+1}$ et $\frac{j+1}{j-1}$

a) $j(j+1) = j^2 + j$

$= -1$

$1 + j + j^2 = 0$ Rappel

b) $\frac{j}{j^2+1} = \frac{j}{-j}$

$= -1$

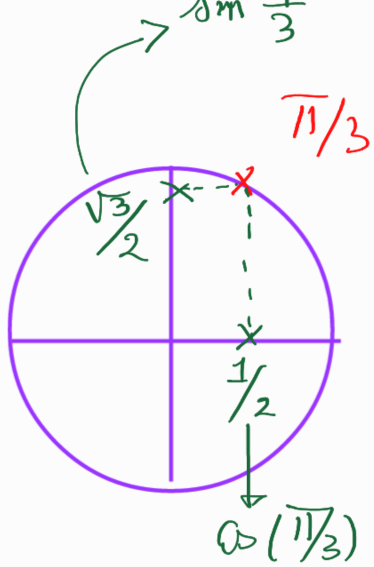
Rappels

$e^{i\theta} + 1 = e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

c) $\frac{j+1}{j-1} = \frac{e^{\frac{2\pi i}{3}} + 1}{e^{\frac{2\pi i}{3}} - 1}$

$= \frac{e^{i\pi/3} \cdot 2\cos(\pi/3)}{e^{i\pi/3} \cdot 2i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$



$= -i \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$

$= -i\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\square$

Exercice 4 :

Rappelons la notation $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Simplifier :

1) $j(j+1)$, $\frac{j}{j^2+1}$ et $\frac{j+1}{j-1}$

2) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$; où $n \succeq 2$.

Indice : Factoriser $k^3 - 1$ en introduisant j.

$$x^3 - 1 = 0 \iff x^3 = 1 \iff \left(x = 1 \text{ ou } x = j \text{ ou } x = j^2\right)$$

$$x^3 - 1 = (x-1)(x-j)(x-j^2)$$

$$x^3 + 1 = -\left((-x)^3 - 1\right) = -(-x-1)(-x-j)(-x-j^2)$$

$$x^3 + 1 = (x+1)(x+j)(x+j^2)$$

Ainsi :

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k-j)(k-j^2)}{(k+1)(k+j)(k+j^2)}$$

$$= \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1} \times \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-j)(k-j^2)}{(k+j)(k+j^2)}$$

Rappel : $1 + j + j^2 = 0$

$$= \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{k} \times \frac{k}{k+1}\right) \times \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-j)(k+1+j)}{(k+j)(k-1-j)}$$

$$= \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \times \prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k+1} \times \prod_{k=2}^{n} \frac{k-j}{k-1-j} \times \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1+j}{k+j}$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{2}{n+1} \times \frac{n-j}{1-j} \times \frac{n+1+j}{2+j}$$

$$= \frac{2(n-j)(n-j^2)}{n(n+1)\,(1-j)(1-j^2)}$$

$$1+j+j^2=0$$

$$= \frac{2(n^2+n+1)}{n(n+1)\,(1^2+1+1)}$$

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$
$$\parallel$$
$$(x-1)(x-j)(x-j^2)$$

$$\boxed{x^2+x+1=(x-j)(x-j^2)}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$$

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n-1)\cdot n\,(n+1)}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{n^3-1}{n(n^2-1)}$$

$\square$

Exercice 5 :

Soient $n \succeq 2$ et ω une racine nème de l'unité. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k$

$$S = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)w^k$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{n}{w-1} & \text{si } w \neq 1 \\ \dfrac{n(n+1)}{2} & \text{si } w = 1 \end{array}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k w^{k-1}$$

$$= \frac{1}{w}\sum_{k=1}^{n} k w^k$$

$$\sum_{k=p}^{q} z^k = z^p \cdot \frac{1-z^{q-p+1}}{1-z}$$

$$wS = \sum_{k=1}^{n} k w^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(k+1)w^k - \sum_{k=1}^{n} w^k \qquad \boxed{\text{Supp } w \neq 1}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)w^k}_{=S} - 1 + (n+1)\underbrace{w^n}_{=1} - w \cdot \frac{\overbrace{1-w^n}^{=0}}{1-w}$$

$$wS = S - 1 + (n+1)$$

$$wS = S + n$$

$$(w-1)S = n$$

$$\boxed{S = \frac{n}{w-1}}$$

Si $w = 1$

$$S = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)w^k = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1) = \frac{1+n}{2} \times n$$

$\boxed{\textbf{Exercice 7 :}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier les expressions suivantes :

1) $\left(\frac{3\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+2i}\right)^{25}$, 2) $(1+i)^n + (1-i)^n$, 3) $\frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^3}$,

4) $(1-j)^6$ 5) $\left(\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{2020}$

---

3) $\frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^3} = S$

$$S = \frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \overline{\left(\frac{(1+i)^4}{(1-i)^3}\right)}$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{(1+i)^4}{(1-i)^3}\right)$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4}{\left(\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}\right)^3}\right)$$

$1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

$1-i = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}$

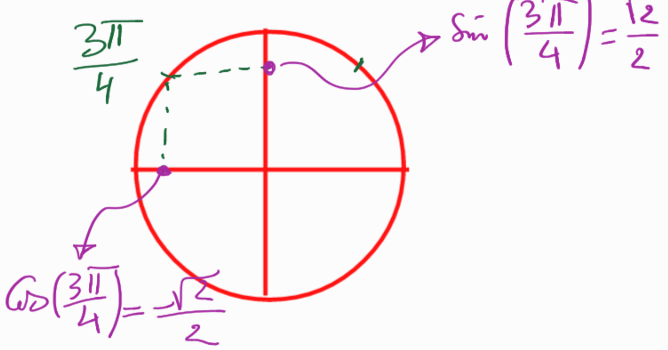
$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{4\,e^{i\pi}\cdot e^{3i\pi/4}}{2\sqrt{2}}\right)$$

$(e^{i\pi} = -1)$

$$= -2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$= 2$$



---

1) $\left(\frac{3\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+2i}\right)^{25} = S$

$$\frac{3\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+2i} = \frac{(3\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}-2i)}{(\sqrt{3}+2i)(\sqrt{3}-2i)}$$

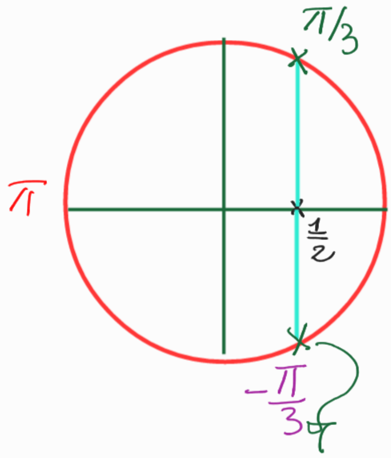
$$= \frac{7-7i\sqrt{3}}{7}$$

$$= 1-i\sqrt{3}$$

D'où $S = (1-i\sqrt{3})^{25}$

On a : $1-i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ $= 2e^{i\,?}$

$$= 2\left(\cos(?) + i\sin(?)\right)$$



on le choisit, car sin < 0

Ainsi : $1-i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$$S = (1-i\sqrt{3})^{25}$$

$$= 2^{25}e^{-i\frac{25\pi}{3}}$$

$25 = 3\times 8 + 1$

$\frac{25}{3} = 8 + \frac{1}{3}$

$$= 2^{25}e^{-i\left(8\pi+\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= 2^{25}e^{-i\frac{\pi}{3}} \qquad \left(\text{car } e^{-8\pi i} = 1 \left(e^{2k\pi i} \underset{\forall k\in\mathbb{Z}}{=} 1\right)\right)$$

$$= 2^{25}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\boxed{S = 2^{24}(1-i\sqrt{3})}$$ □

4) $(1-j)^6 = S_4$

$$j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

$$S_4 = \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^6$$

$$e^{i\theta} - 1 = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$= \left(-2i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6$$

$$= -2^6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 \cdot \underbrace{e^{2\pi i}}_{=1}$$

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= -2^6 \cdot \frac{27}{2^6}$$

$$S = -27$$

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \end{cases}$$

Ex 10

Par sommation :

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$$

Ainsi

$$\cos(3\theta)\sin(6\theta) = \frac{1}{2}\left(\sin(9\theta) + \sin(3\theta)\right)$$

$$\sin(3\theta) = \mathrm{Im}\left(e^{i3\theta}\right)$$ (Moivre)

$$= \mathrm{Im}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^3\right]$$

$$= \mathrm{Im}\left(\cos^3\theta + 3\cos^2\theta \cdot i\sin\theta + 3\cos\theta \cdot (i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3\right)$$

$$= 3\cos^2\theta \cdot \sin\theta - \sin^3\theta$$

$$\sin(9\theta) = \mathrm{Im}\left(e^{i9\theta}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^9\right]$$ (Moivre

$$\boxed{1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 78 \quad 36 \quad 9 \quad 1}$$

Triangle de Pascal

$$= \mathrm{Im}\left(\cos^9\theta + 9\cos^8\theta \cdot (i\sin\theta) + \dots \right)$$

et c'est fini

Triangle de Pascal

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	78	36	9	1

$\boxed{n=9}$

Exercice 11 :

Résoudre l'équation suivante sachant qu'elle possède une solution imaginaire pure :

$$(E) \quad (i-1)z^3-(5i-11)z^2-(43+i)z+9+37i=0$$

Notons (ix), où $x \in \mathbb{R}$, cette solution imaginaire pure de l'équation (E).

On a :

$$(i-1)(ix)^3-(5i-11)(ix)^2-(43+i).(ix)+(9+37i)=0$$

$\Leftrightarrow$ ....

Cherchez le x

...

Exercice 12 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E)\ 1+z+z^2+z^3+z^4=0$

2) Soit z une solution de (E). Posons $x=z+\frac{1}{z}$.
Montrer que x est solution d'une équation simple à préciser.

3) En déduire une expression algébrique de $cos(\frac{2\pi}{5})$.

Solution

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E)\ 1+z+z^2+z^3+z^4=0$

Soit $z\in\mathbb{C}$, avec $z\neq 1$ (1 n'est clairement pas solution de (E)).

$$z \text{ solution de } (E) \iff 1+z+z^2+z^3+z^4=0$$

$$\iff \frac{1-z^5}{1-z}=0 \quad (\text{car } z\neq 1)$$

$$\iff 1-z^5=0$$

$$\iff z^5=1$$

racine 5ème de l'unité

$$\iff z\in\left\{e^{\frac{2k\pi i}{5}} \,/\, 1\leq k\leq 4\right\} \quad (\text{car } z\neq 1)$$

$$\boxed{S=\left\{e^{\frac{2\pi i}{5}}, e^{\frac{4\pi i}{5}}, e^{\frac{6\pi i}{5}}, e^{\frac{8\pi i}{5}}\right\}}$$

2) Soit z une solution de (E). Posons $x=z+\frac{1}{z}$.
Montrer que x est solution d'une équation simple à préciser.

On a $x=z+\frac{1}{z}$, $x^2=z^2+\frac{1}{z^2}+2$

$$z \text{ sol de } (E) \iff 1+z+z^2+z^3+z^4=0$$

$$\iff \frac{1+z+z^2+z^3+z^4}{z^2}=0$$

$$\iff \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2=0$$

$$\iff x+x^2-2+1=0$$

$$\iff \boxed{x^2+x-1=0}$$

3) En déduire une expression algébrique de $cos(\frac{2\pi}{5})$.

$z = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ est une solution de (E).

Alors $\left(e^{\frac{2\pi i}{5}} + \frac{1}{e^{\frac{2\pi i}{5}}}\right)$ est solution de l'équation $x^2+x-1=0$

$$e^{\frac{2\pi i}{5}} + \frac{1}{e^{\frac{2\pi i}{5}}} = e^{\frac{2\pi i}{5}} + e^{-\frac{2\pi i}{5}} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Exercice 20 :

1) Linéariser les expressions suivantes : $\cos^5 x$, $\sin^6 x$, $\sin^3 x \cos^2 x$.

2) (a) Déterminer le polynôme P tel que $P(\cos x) = \cos 5x$.

(b) Déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{10}$ puis $\cos\frac{\pi}{5}$.

1) Linéariser les expressions suivantes : $\cos^5 x$,

$$(\cos x)^5 = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5$$

$$\underbrace{\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}_{\text{Formule d'Euler}}$$

$$= \frac{1}{2^5}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^5$$

Rappel

$\xrightarrow{\text{Binôme de Newton}}$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

1 5 10 10 5 1

$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1

0

0

0

Exercice 16 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

1) Pour tout complexe z de module différent de 1, on a

$$\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \preceq \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$$

2) Pour tout complexe z. On a

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| \preceq \sum_{k=0}^{n}\frac{|z|^k}{k!}-\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n$$

1) $$\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}|z^k| = \sum_{k=0}^{n}|z|^k = \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$$

$$\frac{a^{n+1}-1}{a-1} = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Si $a \neq 1$

Rappel

2) $$\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{z}{n}\right)^k \cdot 1^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{z^k}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{z^k}{k!}-\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{z^k}{n^k}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\left(1-\frac{n!}{(n-k)!n^k}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\left(1-\frac{n\ldots(n-k+1)}{n^k}\right) \quad (\Omega)$$

D'autre part : $n\ldots(n-k+1) \leqslant \underbrace{n\ldots n}_{k \text{ fois}} = n^k$

D'où $\left(1-\frac{n\ldots(n-k+1)}{n^k}\right) \geqslant 0$

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\left(1-\frac{n\dots(n-k+1)}{n^k}\right)\right| \quad \text{(d'après } (\Omega)\text{)}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}\frac{|z|^k}{k!}\left|\underbrace{1-\frac{n\dots(n-k+1)}{n^k}}_{\geq 0}\right|$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{|z|^k}{k!}\left(1-\frac{n\dots(n-k+1)}{n^k}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{|z|^k}{k!}-\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n$$

d'après (Ω), en remplaçant z par $|z|$.

fin Exercice 4

Exercice 22 :

Soient A, B et C trois points d'un plan complexe muni d'un repère orthonormal direct,d'affixes respectivement a, b et c.

1) Montrer que ABC est un triangle équilatéral direct ssi $a+j\,b+j^2\,c=0$.

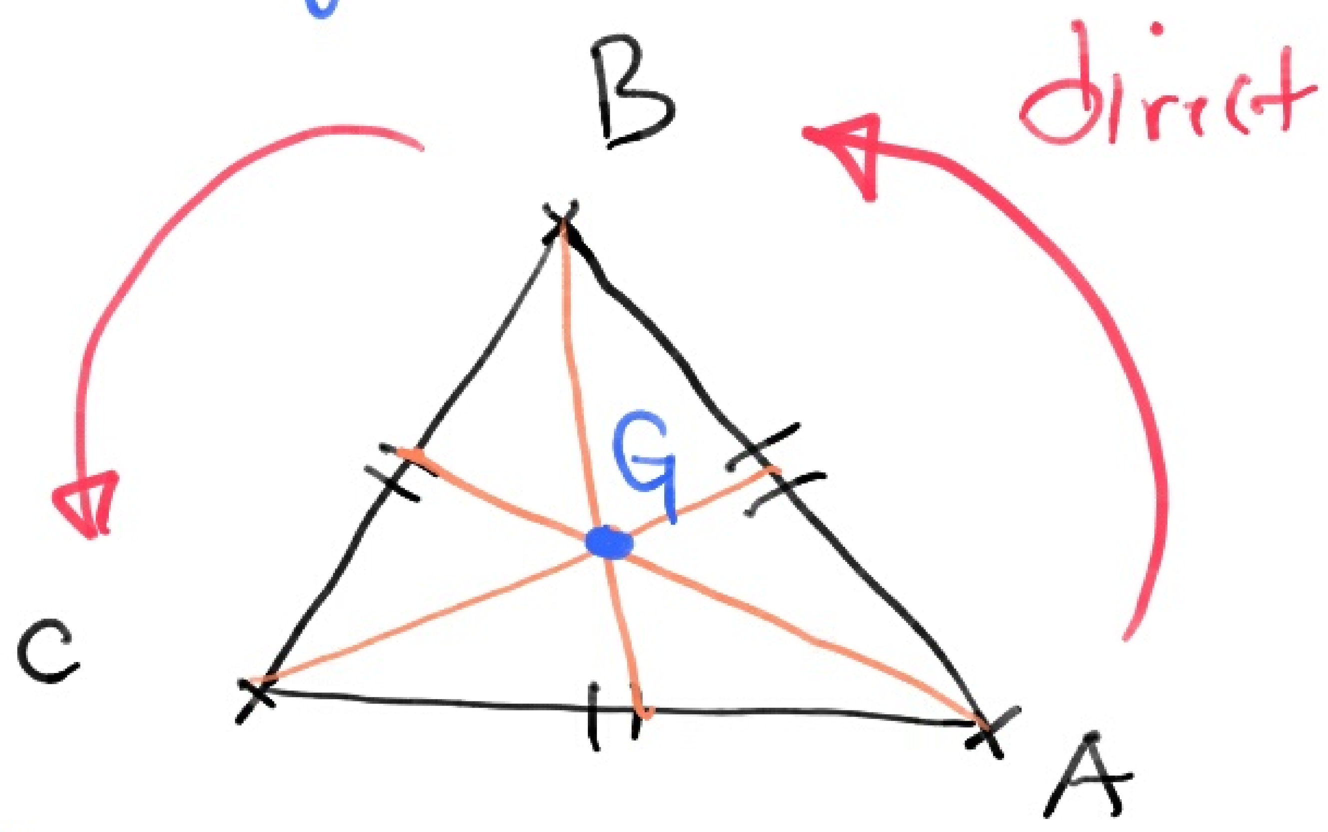
2) Déduire que ABC est un triangle équilatéral indirect ssi $a+j\,c+j^2 b=0$.

3) Montrer que ABC est un triangle équilatéral ssi $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$.

1)

Notons G le centre de gravité du triangle ABC.

On a $z_G = \frac{1}{3}(a+b+c)$.



Notons $r = R\left(G, \frac{2\pi}{3}\right)$.

Son écriture complexe est :

$$(z'-z_G) = e^{\frac{2\pi}{3}i}(z-z_G)$$

Càd $$\boxed{z'-z_G = j\,(z-z_G)}$$

$$(ABC \text{ triangle équilatéral direct}) \iff \begin{cases} r(A)=B \\ r(B)=C \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b-z_G = j\,(a-z_G) \\ c-z_G = j\,(b-z_G) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = ja+(1-j)\,z_G \\ c = jb+(1-j)\,z_G \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = ja+(1-j)\,z_G \\ b-c = ja-jb \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\iff \begin{cases} b = ja+(1-j)\cdot\frac{1}{3}(a+b+c) \\ ja-(1+j)\,b+c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = ja + (1-j)\cdot\frac{1}{3}(a+b+c) \\ ja - (1+j)b + c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3b = 3ja + (1-j)(a+b+c) \\ ja + j^2 b + c = 0 \end{cases}$$

$1+j+j^2=0$

$j^3 = 1$

$$\iff \begin{cases} a(3j+1-j) + b(1-j-3) + (1-j)c = 0 \\ a + jb + j^2 c = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow j^2 L_2$

$$\iff \begin{cases} a(1+2j) + b(-2-j) + (1-j)c = 0 \\ a + jb + j^2 c = 0 \end{cases}$$

$1+j+j^2=0$

$$\iff \begin{cases} a(1+j+j) - b(1+j+1) + (1-j)c = 0 \\ a + jb + j^2 c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a(j-j^2) - b(1-j^2) + (1-j)c = 0 \\ a + jb + j^2 c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} aj\cancel{(1-j)} - b\cancel{(1-j)}(1+j) + \cancel{(1-j)}c = 0 \\ a + jb + j^2 c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} aj - b(1+j) + c = 0 \\ a + jb + j^2 c = 0 \end{cases}$$

$1+j+j^2=0$

$$\iff \begin{cases} aj + bj^2 + c = 0 \\ a + jb + j^2 c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + bj + cj^2 = 0 \\ a + jb + j^2 c = 0 \end{cases}$$

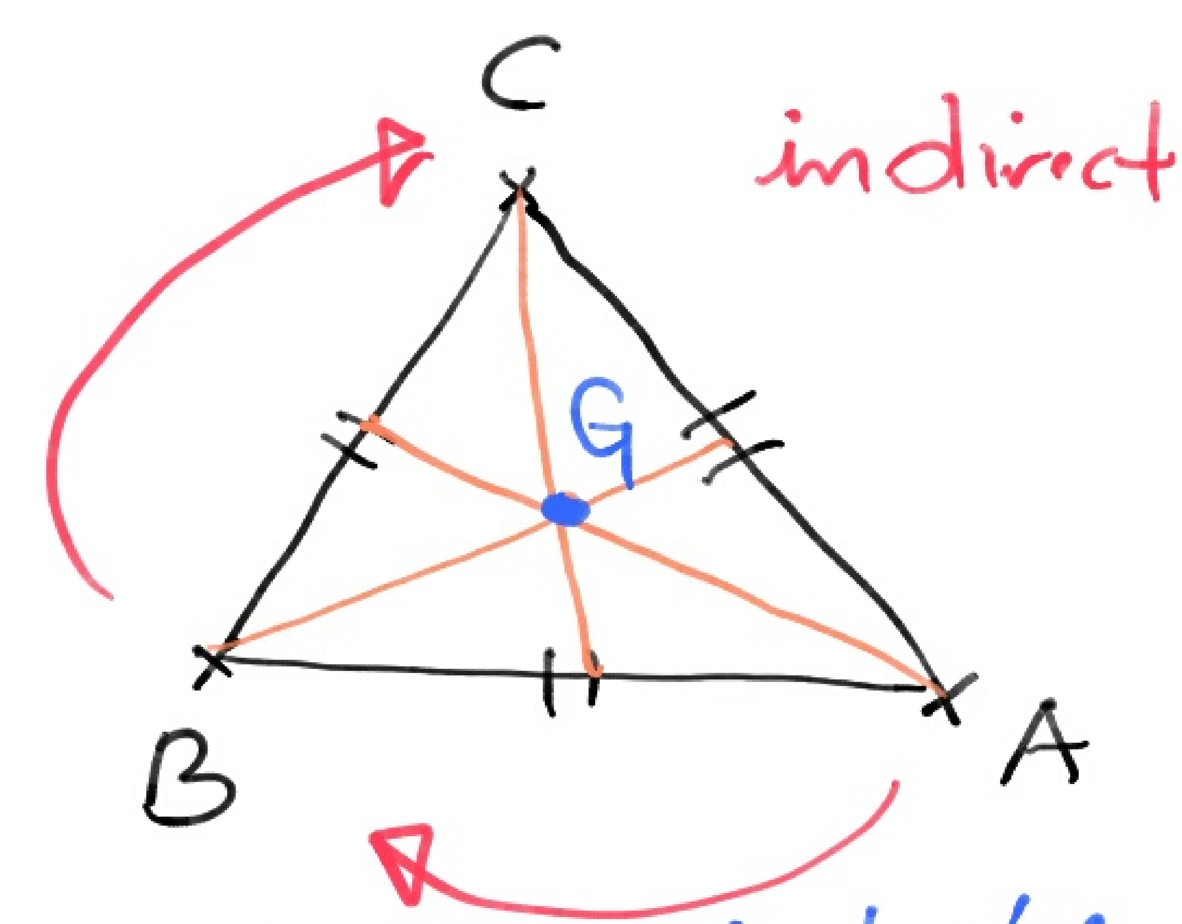
$L_1 \leftarrow j^2 L_1$

$j^3 = 1$

$$\Longleftrightarrow \boxed{a + jb + j^2 c = 0}$$

fin 1°/

2) Déduire que ABC est un triangle équilatéral indirect ssi $a + jc + j^2 b = 0$.



(ABC triangle équilatéral indirect) $\Longleftrightarrow$ (ACB triangle équilatéral direct)

$$\Longleftrightarrow \boxed{a + jc + j^2 b = 0}$$

$\hookrightarrow$ d'après la question 1°/

3) Montrer que ABC est un triangle équilatéral ssi $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

(ABC triangle équilatéral) $\Longleftrightarrow$ (ABC triangle équilatéral direct ou indirect)

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a + jb + j^2 c = 0 \\ \text{ou} \\ a + jc + j^2 b = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow (a + jb + j^2 c)(a + jc + j^2 b) = 0$$

$j^3 = 1$

$1 + j + j^2 = 0$

$$\Longleftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + ac\underbrace{(j + j^2)}_{= -1} + ab\underbrace{(j + j^2)}_{-1} + bc\underbrace{(j^2 + j)}_{-1} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca}$$