# Equations différentielles

## Equation linéaire du premier ordre

**Exercice 1** [ 01541 ] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a) $y' + 2y = x^2$ b) $y' + y = 2\sin x$
c) $y' - y = (x+1)\mathrm{e}^x$ d) $y' + y = x - \mathrm{e}^x + \cos x$

**Exercice 2** [ 01543 ] [correction]
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $I = \mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$ l'équation différentielle

$$xy' - \alpha y = 0$$

**Exercice 3** [ 01542 ] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a) $(x^2+1)y' + 2xy + 1 = 0$ b) $(x^2+1)y' - xy = (x^2+1)^{3/2}$
c) $(x^2+1)^2y' + 2x(x^2+1)y = 1$

**Exercice 4** [ 01280 ] [correction]
Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés
a) $(1+\mathrm{e}^x)y' + \mathrm{e}^x y = (1+\mathrm{e}^x)$ sur $\mathbb{R}$
b) $(\mathrm{e}^x - 1)y' + \mathrm{e}^x y = 1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{-\star}$,
c) $x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$

**Exercice 5** [ 01281 ] [correction]
Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle suivante

$$\sqrt{1-x^2}y' + y = 1$$

**Exercice 6** [ 01379 ] [correction]
Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés
a) $(2+\cos x)y' + \sin(x)y = (2+\cos x)\sin x$ sur $\mathbb{R}$
b) $(1+\cos^2 x)y' - \sin 2x.y = \cos x$ sur $\mathbb{R}$
c) $y'\sin x - y\cos x + 1 = 0$ sur $]0,\pi[$,
d) $(\sin x)^3 y' = 2(\cos x)y$ sur $]0,\pi[$.

**Exercice 7** [ 01434 ] [correction]
Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés
a) $\mathrm{ch}x.y' - \mathrm{sh}x.y = \mathrm{sh}^3 x$ sur $\mathbb{R}$
b) $y' - \frac{\mathrm{sh}x}{1+\mathrm{ch}x}y = \mathrm{sh}x$ sur $\mathbb{R}$
c) $\mathrm{sh}(x)y' - \mathrm{ch}(x)y = 1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{-\star}$,

**Exercice 8** [ 01544 ] [correction]
Former une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont les fonctions

$$f(x) = \frac{C+x}{1+x^2}$$

seraient les solutions.

## Equation linéaire du second ordre à coefficients constants

**Exercice 9** [ 01549 ] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
a) $y'' + y = 0$
b) $y'' - 3y' + 2y = 0$
c) $y'' + 2y' + 2y = 0$

**Exercice 10** [ 01450 ] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
a) $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^x$
b) $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^x$

**Exercice 11** [ 01460 ] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
a) $y'' + y = \mathrm{sh}x$
b) $y'' - 2y' + y = 2\mathrm{ch}x$

**Exercice 12** [ 01435 ] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
a) $y'' + 2y' + 2y = \sin x$
b) $y'' + y = 2\cos^2 x$

**Exercice 13** [ 01550 ] [correction]
Soient $\omega$ et $\omega_0$ deux réels strictement positifs et distincts.
Trouver les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x)$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

**Exercice 14** [ 01551 ] [correction]
Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution de $y'' + ay' + by = 0$ soit bornée sur $\mathbb{R}^+$.

**Exercice 15** [ 01555 ] [correction]
Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue non nulle.
On se propose de montrer que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + q(x)y = 0$ s'annulent.
Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que $f$ est une solution ne s'annulant pas.
a) Justifier que $f$ est de signe constant.
Quitte à considérer $-f$ au lieu de $f$, on peut supposer

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$$

b) Etudier le signe de $f''$.
c) Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. Quelle est l'équation de la tangente à $f$ en $a$ ?
d) Montrer que le graphe de $f$ est en dessous de sa tangente en $a$.
e) En déduire que $f'(a) = 0$ et conclure.

**Exercice 16** [ 03849 ] [correction]
Déterminer les solutions réelles de l'équation

$$(E) : y'' - 3y' + 2y = \sin(2x)$$

# Equation fonctionnelle et équation différentielle

**Exercice 17** [ 01548 ] [correction]
Déterminer les fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$$

**Exercice 18** [ 01546 ] [correction]
Déterminer les fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in [0, 1], f'(x) + f(x) + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

**Exercice 19** [ 01545 ] [correction]
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivables telles que

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, f(s + t) = f(s)f(t)$$

**Exercice 20** [ 01552 ] [correction]
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x$$

**Exercice 21** [ 01553 ] [correction]
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y) \text{ et } f(0) = 1$$

**Exercice 22** [ 01554 ] [correction]
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x$$

**Exercice 23** [ 00378 ] [correction]
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + 1$$

**Exercice 24** [ 03108 ] [correction]
Soient $f$ une fonction réelle continue sur $[0, 1]$ et $\lambda$ un réel.
Trouver $u$ fonction réelle continue sur $[0, 1]$ telle que

$$u(x) = \lambda \int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t + f(x)$$

**Exercice 25** [ 02890 ] [correction]
Trouver les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues telles que pour tout $x$ réel

$$f(x)-2\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t=1$$

**Exercice 26** [ 03197 ] [correction]
Déterminer les fonctions réelles $f$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=f(2-x)$$

# Résolution par changement de fonction inconnue

**Exercice 27** [ 01556 ] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(1+x^2)y''+2xy'=0$$

**Exercice 28** [ 00413 ] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}^{+\star}$ l'équation

$$x^2y''+4xy'-(x^2-2)y=0$$

en posant $z=x^2y$.

**Exercice 29** [ 01561 ] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$E:(1+\mathrm{e}^x)y''+2\mathrm{e}^xy'+(2\mathrm{e}^x+1)y=x\mathrm{e}^x$$

en posant $z(x)=(1+\mathrm{e}^x)y(x)$.

**Exercice 30** [ 01559 ] [correction]
Résoudre l'équation différentielle

$$(1+\mathrm{e}^x)^2y''-2\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)y'-(3\mathrm{e}^x+1)y=0$$

en introduisant

$$z(x)=\frac{y(x)}{1+\mathrm{e}^x}$$

**Exercice 31** [ 01558 ] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$y''+4xy'+(3+4x^2)y=0$$

en introduisant la fonction $z(x)=\mathrm{e}^{x^2}y(x)$.

**Exercice 32** [ 01560 ] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$E:xy''-(1+x)y'+y=1$$

en posant $z=y'-y$.

**Exercice 33** [ 00411 ] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(1+\mathrm{e}^x)y''+y'-\mathrm{e}^xy=0$$

en introduisant la fonction $z=y'+y$.

**Exercice 34** [ 00412 ] [correction]
Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation

$$x^2y''-2y+\frac{3}{x}=0$$

en introduisant la fonction $z(x)=xy'(x)+y(x)$.

# Résolution par changement de variable

**Exercice 35** [ 00415 ] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(1+x^2)^2y''+2(x-1)(1+x^2)y'+y=0$$

en procédant au changement de variable $t=\arctan x$.

**Exercice 36** [ 01564 ] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$
$$(x^2+1)^2y''+2x(x^2+1)y'+y=0$$
via $t=\arctan x$.

**Exercice 37** [ 00416 ] [correction]
Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation
$$(1-x^2)y''-xy'+4y=\arccos x$$
en procédant au changement de variable $x=\cos(t)$.

**Exercice 38** [ 00414 ] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}^{+\star}$ l'équation
$$x^2y''+xy'+y=0$$
en posant $x=\mathrm{e}^t$.

**Exercice 39** [ 01566 ] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}^{+\star}$ les équations suivantes via le changement de variable $t=\ln x$.

a) $x^2y''+xy'-y=x^2$ b) $x^2y''-2y=x$

**Exercice 40** [ 01567 ] [correction]
Résoudre
$$(1+x^2)y''+xy'-4y=0$$
en posant $x=\mathrm{sh}(t)$.

# Corrections

**Exercice 1 :** [énoncé]
a) $y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + C\mathrm{e}^{-2x}$.
b) $y(x) = -\cos x + \sin x + C\mathrm{e}^{-x}$.
c) $y(x) = \left(x^2/2 + x\right)\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^x$.
d) $y(x) = x - 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + C\mathrm{e}^{-x}$.

**Exercice 2 :** [énoncé]
Sur $I$,

$$xy' - \alpha y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{\alpha}{x}y$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène.

$$\int \frac{\alpha}{x}\,\mathrm{d}x = \alpha \ln|x|$$

donc la solution générale de l'équation étudiée est

$$y(x) = C\,|x|^\alpha$$

**Exercice 3 :** [énoncé]
a) $y(x) = \frac{C-x}{1+x^2}$
b) $y(x) = \sqrt{1+x^2}(C+x)$
c) $y(x) = \frac{C+\arctan x}{1+x^2}$

**Exercice 4 :** [énoncé]
a) $y(x) = \frac{C+x+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$
b) $y(x) = \frac{C+x}{\mathrm{e}^x-1}$
c) $y(x) = \frac{C+\ln x}{(1+\ln^2 x)}$

**Exercice 5 :** [énoncé]
On obtient la solution générale

$$y(x) = 1 + C\mathrm{e}^{\arccos x}$$

ou encore, et c'est équivalent

$$y(x) = 1 + C'\mathrm{e}^{-\arcsin x}$$

**Exercice 6 :** [énoncé]
a) $y(x) = (2+\cos x)(C - \ln(2+\cos x))$
b) $y(x) = \frac{C+\sin x}{1+\cos^2 x}$
c) $y(x) = C\sin x + \cos x$
d) $y(x) = C\mathrm{e}^{-1/\sin^2 x}$

**Exercice 7 :** [énoncé]
a)$y(x) = \mathrm{ch}^2 x + 1 + C\mathrm{ch}x$
b) $y(x) = (\ln(1+\mathrm{ch}x) + C)(1+\mathrm{ch}x)$
c) $y(x) = C\mathrm{sh}x - \mathrm{ch}x$

**Exercice 8 :** [énoncé]
En exprimant $C$ en fonction de $f$ et en dérivant, on peut proposer l'équation suivante

$$(1+x^2)y' + 2xy = 1$$

**Exercice 9 :** [énoncé]
a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation caractéristique associée est $r^2 + 1 = 0$ de racines $\pm i$.
La solution générale est donc

$$y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x$$

b) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ de racines 1 et 2
La solution générale est donc

$$y(x) = \lambda\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{2x}$$

c) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation caractéristique associée est $r^2 + 2r + 2 = 0$ de racines $-1 \pm i$.
La solution générale est donc

$$y(x) = (\lambda\cos x + \mu\sin x)\,\mathrm{e}^{-x}$$

**Exercice 10 :** [énoncé]
a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2+2r+1=0$ de racine double $-1$
La solution générale homogène est donc

$$y(x)=(\lambda x+\mu)\mathrm{e}^{-x}$$

Une solution particulière est à rechercher de la former $y(x)=\alpha\mathrm{e}^x$. On obtient $\alpha=1/4$
La solution générale est alors

$$y(x)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^x+(\lambda x+\mu)\mathrm{e}^{-x}$$

b) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2+r-2=0$ de racines 1 et $-2$
La solution générale homogène est donc

$$y(x)=\lambda\mathrm{e}^x+\mu\mathrm{e}^{-2x}$$

Une solution particulière est à rechercher de la former $y(x)=\alpha x\mathrm{e}^x$. On obtient $\alpha=1/3$.
La solution générale est alors

$$y(x)=\frac{1}{3}x\mathrm{e}^x+\lambda\mathrm{e}^x+\mu\mathrm{e}^{-2x}$$

**Exercice 11 :** [énoncé]
a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2+1=0$ de racines $\pm i$.
La solution générale homogène est donc $y(x)=\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)$
$y(x)=\frac{1}{2}\mathrm{sh}(x)$ est solution apparente de l'équation complète.
La solution générale est alors

$$y(x)=\frac{1}{2}\mathrm{sh}(x)+\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)$$

b) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $(r-1)^2=0$ de racine double 1.
La solution générale homogène est donc $y(x)=(\lambda x+\mu)\mathrm{e}^x$

Le second membre de l'équation se décompose

$$2\mathrm{ch}(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$$

On détermine une solution particulière pour chacun des deux termes et, par le principe de superposition, on peut exprimer la solution générale

$$y(x)=\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x}+(\lambda x+\mu)\mathrm{e}^x$$

**Exercice 12 :** [énoncé]
a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2+2r+2=0$ de racines $-1\pm i$.
La solution générale homogène est donc $y(x)=(\lambda\cos x+\mu\sin x)\,\mathrm{e}^{-x}$
En déterminant une solution particulière à l'équation complexe

$$z''+2z'+2z=\mathrm{e}^{ix}$$

on obtient par sa partie imaginaire une solution particulière de l'équation en cours.
Au final, la solution générale est

$$y(x)=-\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x+(\lambda\cos x+\mu\sin x)\mathrm{e}^{-x}$$

b) ) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2+1=0$ de racines $\pm i$.
La solution générale homogène est donc $y(x)=\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)$
On décompose le second membre par la formule

$$2\cos^2 x=\cos(2x)+1$$

On détermine une solution particulière pour chacun de deux termes puis, par le principe de superposition des solutions, on exprime la solution générale

$$y(x)=1-\frac{1}{3}\cos 2x+\lambda\cos x+\mu\sin x$$

**Exercice 13 :** [énoncé]
Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2+\omega^2=0$ de racines $\pm i\omega$.

La solution générale homogène est donc $y(x) = \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$
En introduisant l'équation complexe

$$z'' + \omega^2 z = \mathrm{e}^{i\omega_0 x}$$

et en considérant la partie réelle d'une solution particulière de celle-ci, on peut exprimer la solution générale

$$y(x) = \frac{\cos(\omega_0 x)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$$

Les conditions initiales déterminent $\lambda$ et $\mu$

$$y(x) = \frac{\cos(\omega_0 x) - \cos(\omega x)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \cos(\omega x)$$

**Exercice 14 :** [énoncé]
Posons $\Delta = a^2 - 4b$ discriminant de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.
Si $\Delta > 0$ alors les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ seront bornées sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, les deux solutions de l'équation $r^2 + ar + b = 0$ sont négatives i.e. $a \geqslant 0$ (opposé de la somme des racines) et $b \geqslant 0$ (produit des racines).
Si $\Delta = 0$ alors les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ seront bornées sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, $a > 0$.
Si $\Delta < 0$ alors les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ seront bornées sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, elles sont de parties réelles négatives i.e. $a \geqslant 0$.
Au final les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, $a, b \geqslant 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.

**Exercice 15 :** [énoncé]
a) $f$ est continue, si $f$ n'est pas de signe constant alors $f$ s'annule.
b) On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -q(x)f(x) \leqslant 0$$

c) L'équation est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

d) Considérons $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a))$.
$g$ est dérivable et $g'(x) = f'(x) - f'(a)$. Or $f'$ est décroissante, on peut donc dresser le tableau de variation de $g$ et puisque $g(a) = 0$, constater

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leqslant 0$$

e) Si $f'(a) \neq 0$ alors $f$ étant en dessous de sa tangente prend des valeurs négatives, c'est impossible.
On en déduit que

$$\forall a \in \mathbb{R}, f'(a) = 0$$

donc $f$ est constante et $f'' = 0$.
Pour que $f$ vérifie l'équation

$$y'' + q(x)y = 0$$

(sachant $q \neq 0$) il est nécessaire que $f$ soit constante égale à 0.
C'est absurde.

**Exercice 16 :** [énoncé]
$(E)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

de racines 1 et 2
Solution générale homogène :

$$y(x) = \lambda\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{2x} \text{ avec } \lambda, \mu \text{ parcourant } \mathbb{R}$$

Cherchons une solution particulière à l'équation

$$z'' - 3z' + 2z = \mathrm{e}^{2ix}$$

de la forme $z(x) = \lambda\mathrm{e}^{2ix}$. On est amené à résoudre

$$(-2 - 6i)\lambda\mathrm{e}^{2ix} = \mathrm{e}^{2ix}$$

On obtient

$$z(x) = \frac{3i - 1}{20}\mathrm{e}^{2ix}$$

et l'on peut donc proposer la solution particulière

$$y(x) = \frac{3}{20}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x)$$

La solution générale de $(E)$ est alors

$$y(x) = \lambda\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{2x} + \frac{3}{20}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x) \text{ avec } \lambda, \mu \text{ parcourant } \mathbb{R}$$

**Exercice 17 :** [énoncé]
Une telle fonction est solution d'une équation différentielle de la forme $y' + y = C$ et vérifie $y(0) + y(1) = C$.
Les solutions de cette équation différentielle sont $y(x) = C + De^{-x}$.

$$y(0) + y(1) = 2C + D\frac{1+e}{e} = C \Leftrightarrow D = -\frac{eC}{e+1}$$

Les solutions sont les

$$f(x) = C\frac{e + 1 - e^{-x+1}}{e+1}$$

Inversement : ok

**Exercice 18 :** [énoncé]
Supposons $f$ solution.
$f$ est solution d'une équation différentielle de la forme $y' + y + \lambda = 0$ donc $f(x) = Ce^{-x} - \lambda$. De plus, pour une telle fonction,

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{C(e\ -1)}{e} - \lambda$$

et donc une telle fonction est solution si, et seulement si,

$$\frac{C(e\ -1)}{e} - \lambda = \lambda$$

d'où

$$\lambda = \frac{C(e\ -1)}{2e}$$

Finalement, les solutions sont

$$f(x) = Ce^{-x} - \frac{C(e\ -1)}{2e}$$

**Exercice 19 :** [énoncé]
Supposons $f$ solution. En évaluant la relation en $s = t = 0$ on obtient $f(0) = f(0)^2$ donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$
En dérivant la relation en $t$ on obtient : $f'(s+t) = f(s)f'(t)$ puis en évaluant en $t = 0$ : $f'(s) = f'(0)f(s)$.
Ainsi $f$ est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = \alpha y$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.
On en déduit $f(x) = Ce^{\alpha x}$ avec $C, \alpha \in \mathbb{C}$.
Parmi ces solutions, celles vérifiant $f(0) = 0$ ou $1$ sont $f(x) = 0$ et $f(x) = e^{\alpha x}$.
Inversement, ces fonctions sont solutions.

**Exercice 20 :** [énoncé]
Analyse : Supposons $f$ est solution. On a

$$f'(x) = e^x - f(-x)$$

La fonction $f'$ est dérivable et

$$f''(x) = e^x + f'(-x) = e^x + e^{-x} - f(x)$$

La fonction $f$ est donc de l'équation différentielle $y'' + y = 2\text{ch}x$
Après résolution

$$f(x) = \text{ch}x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Synthèse : Une telle fonction est solution du problème si, et seulement si,

$$\text{sh}x - C_1 \sin x + C_2 \cos x + \text{ch}x + C_1 \cos x - C_2 \sin x = e^x$$

Ce qui donne $C_1 + C_2 = 0$.
Finalement les solutions du problème posé sont

$$f(x) = \text{ch}x + C(\cos x - \sin x)$$

**Exercice 21 :** [énoncé]
Soit $f$ solution.
En prenant $x = 0$ dans la relation, on observe que $f$ est nécessairement paire.
En dérivant la relation deux fois par rapport à $x$ on obtient

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)f(y)$$

En dérivant la relation deux fois par rapport à $y$ on obtient

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$$

On en déduit

$$f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$$

Pour $y = 0$, on obtient l'équation $f''(x) = \lambda f(x)$ avec $\lambda = f''(0)$.
Si $\lambda > 0$ alors $f(x) = \text{ch}\sqrt{\lambda}x$.
Si $\lambda = 0$ alors $f(x) = 1$.
Si $\lambda < 0$ alors $f(x) = \cos\sqrt{-\lambda}x$
Inversement, on vérifie par le calcul qu'une fonction de la forme précédente est solution du problème posé.

**Exercice 22 :** [énoncé]
Soit $f$ une solution du problème posé.
Posons $g(x) = f(x) + f(-x)$. La fonction $g$ est une fonction paire, deux fois dérivable et solution de : $y'' + y = 0$. Par suite $g(x) = C\cos(x)$
Posons $h(x) = f(x) - f(-x)$. La fonction $h$ est une fonction impaire, deux fois dérivable et solution de : $y'' - y = 2x$. Par suite $h(x) = D\mathrm{sh}x - 2x$.
On en déduit $f(x) = C\cos x + D\mathrm{sh}x - x$.
Inversement de telles fonctions sont bien solutions.

**Exercice 23 :** [énoncé]
Si $f$ est solution alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a :

$$f'(x) = xf(x) \text{ et } f(0) = 1$$

Après résolution de l'équation différentielle sous-jacente, on obtient

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2/2}$$

Inversement, $f(x) = \mathrm{e}^{x^2/2}$ définit une solution du problème posé.

**Exercice 24 :** [énoncé]
Soit $u$ une fonction solution.
Posons

$$U(x) = \int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction $U$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie

$$\begin{cases} U(0) = 0 \\ U'(x) = \lambda U(x) + f(x) \end{cases}$$

La résolution de l'équation différentielle linéaire $U' = \lambda U + f(x)$ donne par pour solution générale

$$U(x) = C\mathrm{e}^{-\lambda x} + \left(\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

La condition initiale $U(0) = 0$ déterminer la constante $C$

$$C = 0$$

On en déduit la fonction $u$

$$u(x) = f(x) - \lambda\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{\lambda(t-x)}\,\mathrm{d}t$$

Inversement, une telle fonction est solution car sa primitive s'annulant en 0 vérifie l'équation $U' = \lambda U + f(x)$.

**Exercice 25 :** [énoncé]
Remarquons

$$\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t = \cos x\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t + \sin x\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$$

Si $f$ est solution alors

$$f(x) = 1 + 2\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t$$

et donc $f(0) = 1$.
$f$ est dérivable car somme de fonctions dérivables.

$$f'(x) = -2\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t + 2\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t + 2f(x)$$

et $f'(0) = 2$.
$f$ est alors deux fois dérivable et

$$f''(x) = 1 - f(x) + 2f'(x)$$

Ainsi $f$ est solution de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = 1$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.
La solution générale de cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 est

$$y(x) = (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^x + 1$$

Cela conduit à $f(x) = 2x\mathrm{e}^x + 1$.
Inversement, soit par calculs, soit en remontant le raisonnement, on peut affirmer que la fonction proposée est solution.

**Exercice 26 :** [énoncé]
Soit $f$ une fonction solution (s'il en existe).
La dérivée de $f$ apparaît dérivable et donc $f$ est deux fois dérivable avec

$$f''(x) = -f'(2-x) = -f(x)$$

Ainsi $f$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constant de solution générale

$$y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x$$

En injectant dans l'équation étudiée, une telle fonction est solution si, et seulement si,

$$\begin{cases} -\lambda = \lambda\sin 2 - \mu\cos 2 \\ \mu = \lambda\cos 2 + \mu\sin 2 \end{cases}$$

ce qui après résolution équivaut à l'équation

$$(1+\sin 2)\lambda = (\cos 2)\mu$$

En écrivant $\lambda = (\cos 2)\alpha$, on a $\mu = (1+\sin 2)\alpha$ et la solution générale de l'équation étudiée est de la forme

$$f(x) = \alpha\left(\sin x + \cos(2-x)\right) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

**Exercice 27 :** [énoncé]
Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Posons $z = y'$, $z$ est dérivable.
$y$ est solution de l'équation différentielle si, et seulement si, $z$ solution de

$$(1+x^2)z' + 2xz = 0$$

On obtient

$$z(x) = \frac{C}{1+x^2}$$

puis

$$y(x) = C\arctan x + D$$

**Exercice 28 :** [énoncé]
Soit $y : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.
Posons $z : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ définie par $z(x) = x^2y(x)$. $z$ est deux fois dérivable.
$z'(x) = x^2y'(x) + 2xy(x)$, $z''(x) = x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x)$.
On observe $x^2y'' + 4xy' - (x^2-2)y = 0 \Leftrightarrow z'' - z = 0$
La solution générale de l'équation $z'' = z$ est $z(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}$.
La solution générale de l'équation initiale est donc $y(x) = \frac{\lambda e^x + \mu e^{-x}}{x^2}$.

**Exercice 29 :** [énoncé]
Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $z(x) = (1+e^x)y(x)$.
$z$ est deux fois dérivable et $z'(x) = (1+e^x)y'(x) + e^xy(x)$,
$z''(x) = (1+e^x)y''(x) + 2e^xy'(x) + e^xy(x)$
$y$ est solution de $E$ si, et seulement si, $z$ est solution de $F : z'' + z = xe^x$.
$F$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants de solution homogène $z_0(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x$ et de solution particulière :
$z_1(x) = \frac{x-1}{2}e^x$.
Solution générale de $F$ : $z(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \frac{x-1}{2}e^x$.
La solution générale de $E$ est donc : $y(x) = \frac{\lambda\cos x + \mu\sin x + \frac{x-1}{2}e^x}{1+e^x}$.

**Exercice 30 :** [énoncé]
Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$z(x) = \frac{y(x)}{1+e^x}$$

La fonction $z$ est deux fois dérivable.
On a $y(x) = (1+e^x)z(x)$, $y'(x) = (1+e^x)z'(x) + e^xz(x)$,
$y''(x) = (1+e^x)z''(x) + 2e^xz'(x) + e^xz(x)$.
$y$ est solution de l'équation étudiée si, et seulement si, $z'' - z = 0$.
On obtient pour solution générale de l'équation $z'' - z = 0$

$$z(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}$$

et on en déduit la solution générale de l'équation étudiée

$$y(x) = (C_1e^x + C_2e^{-x})(1+e^x)$$

**Exercice 31 :** [énoncé]
Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Posons $z : x \mapsto e^{x^2}y(x)$, $z$ est deux fois dérivable.
$y$ est solution de l'équation différentielle si, et seulement si, $z$ solution de $z'' + z = 0$.
On obtient

$$z(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$$

et on en déduit

$$y(x) = (C_1\cos x + C_2\sin x)e^{-x^2}$$

**Exercice 32 :** [énoncé]
Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $z = y' - y$.
$z$ est dérivable et $z' = y'' - y'$.
$y$ est solution de $E$ si, et seulement si, $z$ est solution de $F : xz' - z = 1$.
$F$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Solution générale de $F$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{-\star}$ : $z(x) = Cx - 1$.
Après recollement, solution générale de $F$ sur $\mathbb{R}$ : $z(x) = Cx - 1$.
Reste à résoudre $G : y' - y = Cx - 1$.
Solution homogène : $y_0(x) = D\mathrm{e}^x$.
Solution particulière $y_1(x) = -C(x+1) + 1$.
Solution générale de $E$ : $y(x) = -C(x+1) + D\mathrm{e}^x + 1$ avec $C, D \in \mathbb{R}$.

**Exercice 33 :** [énoncé]
Soit $y$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Posons $z$ la fonction définie par $z = y + y'$.
$y$ est solution de l'équation différentielle proposée si, et seulement si, $z$ est solution de $(1+\mathrm{e}^x)z' - \mathrm{e}^x z = 0$ i.e. $z(x) = C(\mathrm{e}^x + 1)$. On en déduit
$y(x) = \alpha \mathrm{e}^{-x} + \beta(\mathrm{e}^x + 2)$.

**Exercice 34 :** [énoncé]
Soit $y$ une fonction deux fois dérivable définie sur $]0, +\infty[$ et $z$ la fonction définie par $z(x) = xy'(x) + y(x)$. $z$ est dérivable. $y$ est solution de l'équation différentielle proposée si, et seulement si, $z$ est solution de

$$x.z' - 2z = -\frac{3}{x}$$

Après résolution de cette équation différentielle :

$$z(x) = Cx^2 + \frac{1}{x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Par suite

$$xy'(x) + y(x) = Cx^2 + 1/x$$

Après résolution de cette équation différentielle

$$y(x) = \frac{C'}{x} + \frac{1}{3}Cx^2 + \frac{\ln x}{x} \text{ avec } C, C' \in \mathbb{R}$$

Inversement les fonctions proposées sont bien solutions.

**Exercice 35 :** [énoncé]
Soit $y$ une fonction deux fois dérivable définie sur $\mathbb{R}$.
Posons $z$ la fonction définie sur $]-\pi/2, \pi/2[$ par $z(t) = y(x) = y(\tan t)$.
$z$ est deux fois dérivable.
Après calculs :
$y$ est solution de l'équation différentielle proposée si, et seulement si, $z$ est solution de l'équation $z'' - 2z' + z = 0$ i.e. $z(t) = (\lambda t + \mu)\mathrm{e}^t$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
On en déduit $y(x) = (\lambda \arctan x + \mu)\mathrm{e}^{\arctan x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

**Exercice 36 :** [énoncé]
Soit $y$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z : I = ]-\pi/2, \pi/2[ \to \mathbb{R}$ définie par $z(t) = y(\tan t)$.
$z$ est deux fois dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = z(\arctan x)$$

$$y'(x) = \frac{z'(\arctan x)}{1+x^2} \text{ et } y''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} z'(\arctan x) + \frac{1}{(1+x^2)^2} z''(\arctan x)$$

$y$ est solution si, et seulement si, $z$ est solution sur $I$ de l'équation $z'' + z = 0$.
On obtient

$$z(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t$$

et

$$y(x) = \frac{\lambda + \mu x}{\sqrt{1+x^2}}$$

**Exercice 37 :** [énoncé]
$x = \cos t, t = \arccos x, x \in ]-1, 1[, t \in ]0, \pi[$.
Soit $y$ une fonction deux fois dérivable définie sur $]-1, 1[$.
Posons $z$ la fonction définie sur $]0, \pi[$ par $z(t) = y(x) = y(\cos t)$.
$z$ est deux fois dérivable.
Après calculs :
$y$ est solution de l'équation différentielle proposée si, et seulement si, $z$ est solution de l'équation différentielle $z'' + 4z = t$ i.e.

$$z(t) = \lambda \cos 2t + \mu \sin 2t + \frac{1}{4}t \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

On en déduit

$$y(x) = \lambda(2x^2 - 1) + 2\mu x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4}\arccos x \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

**Exercice 38 :** [énoncé]
Soit $y : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.
Posons $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$. $z$ est deux fois dérivable.
$y(x) = z(\ln x)$, $y'(x) = \frac{1}{x}z'(\ln x)$ et $y''(x) = \frac{1}{x^2}z''(\ln x) - \frac{1}{x^2}z'(\ln x)$.
Par suite $x^2y'' + xy' + y = 0 \Leftrightarrow z'' + z = 0$.
Solution générale : $y(x) = \lambda \cos(\ln x) + \mu \sin(\ln x)$.

**Exercice 39 :** [énoncé]
a) Les solutions sur $\mathbb{R}^{+\star}$ sont :

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2 x + \frac{x^2}{3}$$

b) Les solutions sur $\mathbb{R}^{+\star}$ sont :

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2 x^2 - \frac{x}{2}$$

**Exercice 40 :** [énoncé]
Soit $y$ une fonction deux fois dérivable définie sur $\mathbb{R}$.
Posons $z$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y(\mathrm{sh}(t))$. $z$ est deux fois dérivable.
Après calculs : $y$ est solution de l'équation différentielle proposée si, et seulement si, $z$ est solution de l'équation $z'' - 4z = 0$.
On obtient

$$z(t) = C_1 \mathrm{e}^{2t} + C_2 \mathrm{e}^{-2t}$$

puis

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{2\mathrm{argsh} x} + C_2 \mathrm{e}^{-2\mathrm{argsh} x} = C_1 (x + \sqrt{1+x^2})^2 + \frac{C_2}{(x + \sqrt{1+x^2})^2}$$