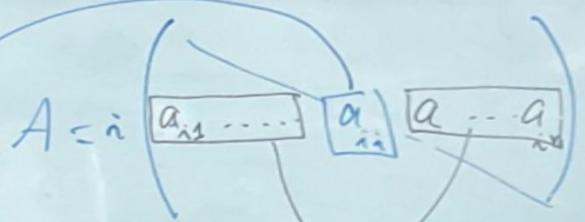


Exercice 5 :

Soit $n \geq 2$. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant

$$\forall i \in [1, n], |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$



Notre objectif est de montrer que la matrice A , dite à diagonale strictement dominante, est inversible.

1) Supposons l'existence d'un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ non nul de $M_{n,1}(\mathbb{C})$ tel

que $AX = 0$.

Soit $k \in [1, n]$ tel que $|x_k| = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Montrer que $|a_{kk}x_k| \leq \sum |a_{kj}x_j|$

Exercice 5 :

Soit $n \geq 2$. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant

$$\forall i \in [1, n], |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Notre objectif est de montrer que la matrice A , dite à diagonale strictement dominante, est inversible.

1) Supposons l'existence d'un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ non nul de $M_{n,1}(\mathbb{C})$ tel

que $AX = 0$.

Soit $k \in [1, n]$ tel que $|x_k| = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Montrer que $|a_{kk}x_k| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}x_j|$

2) Aboutir à une contradiction.

3) Conclure.

$\exists \lambda \in \mathbb{C}$
inversible $\Leftrightarrow \ker(A - \lambda I) = \{0\}$
bijection
 $(\forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda I \text{ inversible})$

A inversible $\Leftrightarrow (\forall X \in M_n(\mathbb{C}), AX = 0 \Rightarrow X = 0)$

Soit $X \in M_n(\mathbb{C})$.

Supp $AX = 0$

Soit $X = 0$

Supp $X \neq 0$

$\forall i, |x_i| \leq |x_k|$