Exercice 5 :

Soit $n \geq 2$. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A = i \ (a_{i1} \dots \ a_{ii} \ a \dots a_{in})$

$$\forall i \in [1, n], \ |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Notre objectif est de montrer que la matrice A, dite à diagonale strictement dominante, est inversible.

1) Supposons l'existence d'un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ non nul de $\mathbb{M}_{n1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = 0$.
Soit $k \in [1, n]$ tel que $|x_k| = sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.
Montrer que $|a_{kk} x_k| \leq \sum |a_{kj} x_j|$

Exercice 5 :

Soit $n \geq 2$. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant

$$\forall i \in [1, n],\ |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Notre objectif est de montrer que la matrice A, dite à diagonale strictement dominante, est inversible.

1) Supposons l'existence d'un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ non nul de $\mathrm{M}_{n1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = 0$.
Soit $k \in [1, n]$ tel que $|x_k| = sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.
Montrer que $|a_{kk} x_k| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj} x_j|$

2) Aboutir à une contradiction.

3) Conclure.

$f \in \mathcal{L}(E)$:
f inversible $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in E,\ f(x) = 0 \Rightarrow x$
bijectif
A inversible $\Leftrightarrow$ $(\forall X \in M_{n1}(\mathbb{K}),\ AX = 0 \Rightarrow X =$

Soit $X \in M_{n1}(\mathbb{C})$.
Supp $AX = 0$
M.q $X = 0$
Par l'absurde.
Supp $X \neq 0$

$\forall i,\ |x_i| \leq$? $\forall i,\ |x_i|$