Espaces préhilbertiens réels

Exercice 1

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons l'application Φ définie par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \Phi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$$

Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2) $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$. Considérons l'application Ψ définie par :

$$\forall f, g \in E, \Psi(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1 - t^2)dt$$

Montrer que Ψ est un produit scalaire sur E.

Exercice 2

$\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
Notons $e_1 = (1, 0, 1, 0), e_2 = (1, -1, 1, -1)$ et $F = vect(e_1, e_2)$

1) Déterminer une base orthonormale de F.
2) Déterminer $d(x, F)$, où $x = (1, 1, 1, 1)$

Exercice 3

On considère l'application définie sur $M_n(\mathbb{R})^2$ par :

$$(A|B) = tr({}^t A.B)$$

1) Montrer que cette application est un produit scalaire pour lequel la base canonique est orthonormée. On note $||.||$ la norme associée.
2) Montrer que
$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), |tr(A)| \leq \sqrt{n}||A||$$
3) Quel l'orthogonal de S, l'espace des matrices symétriques ?
4) En déduire
$$inf_{(m_{ij}) \in S} \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} (A_{ij} - m_{ij})^2 \right)$$
$A = (A_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ étant une matrice fixée.

Exercice 4

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $ker(A) = ker(^tA.A)$
2) En déduire que :
   a) $rg(A) = rg(^tA.A) = rg(A.^tA)$
   b) $Im(A) = Im(A.^tA)$

Exercice 5

$E = \mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel. Q est le plan d'équation cartésienne

$$Q :\ x - y + z = 0$$

1) Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur Q.
2) Calculer $d(A, Q)$, où $A = (-1, 2, 1)$

Exercice 6

$(E, < \cdot | \cdot >)$ un espace euclidien.

1) a un vecteur non nul de E et $D = vect(a)$.
   Expliciter $P_D(x)$, la projection orthogonale de x sur D.
2) Soit H l'hyperplan orthogonal au vecteur a.
   Expliciter $P_H(x)$.
3) $E = \mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel. P est le plan d'équation cartésienne $P :\ x - y + z = 0$.
   Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur P.
   Comparer avec le résultat trouvé dans : Exercice 5. 1)

Exercice 7

$M_2(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire : $(A|B) = tr(^tA.B)$

$H = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / tr(M) = 0\}$. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) a) Justifier que H est un hyperplan de $M_2(\mathbb{R})$
   b) Déterminer $d(A, H)$.
2) a) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.
   b) Déterminer une base de $F^{\perp}$
   c) Déterminer la projection orthogonale de A sur $F^{\perp}$