L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP,
comporte 5 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Fonctions de Bessel et équation de Kepler

Le sujet est composé de quatre parties ; il traite quelques propriétés des fonctions de BESSEL et propose l'étude d'une équation implicite dite de KEPLER. Ces propriétés font appel à des résultats sur la fonction Γ et notamment à la formule (1) due à EULER et partiellement démontrée dans la seconde partie du sujet.

Les deux premières parties du sujet sont indépendantes entre elles ; la troisième partie traite des fonctions de BESSEL et utilise des résultats des deux parties qui la précédent. La quatrième partie, consacrée à l'étude de l'équation de KEPLER, est indépendante des trois autres à l'exception du résultat établi à la fin de la troisième partie et concernant l'expression intégrale de J_n, fonction de BESSEL d'indice $n \in \mathbb{N}$.

1^{ère} partie

Une fonction définie par une intégrale

Soit λ un réel vérifiant $2\lambda > -1$.

1.1. Montrer que, pour tout réel x, la fonction $\theta \longmapsto e^{-ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta$ est intégrable sur l'intervalle $]0,\pi[$.

Dans la suite, on pose

$$f_\lambda(x) = \int_0^\pi e^{-ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta\, d\theta, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.2. Montrer que, pour tout réel x, $f_\lambda(x) = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos\theta)\sin^{2\lambda}\theta\, d\theta$; en particulier la fonction f_λ est à valeurs réelles.

1.3. Montrer que la fonction f_λ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donner, pour tout entier naturel p et tout réel x, une expression de $f_\lambda^{(p)}(x)$ sous forme intégrale.

1.4. Une équation différentielle

1.4.1. Montrer que $f''_\lambda = f_{\lambda+1} - f_\lambda$.

1.4.2. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que $-x\, f_{\lambda+1}(x) = (2\lambda+1)\, f'_\lambda(x),\ x \in \mathbb{R}$.

1.4.3. En déduire que la fonction f_λ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$xy'' + (2\lambda+1)y' + xy = 0. \qquad (F_\lambda)$$

2^{ème} partie
Une formule d'Euler

On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie, pour tout $x > 0$, par $\Gamma(x) := \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

2.1. Soit p un réel strictement positif.

2.1.1. Montrer que $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

2.1.2. Calculer $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel non nul n.

2.1.3. Justifier que $\Gamma(p) > 0$.

2.1.4. Montrer que $\Gamma(p) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} s^{2p-1}\,e^{-s^2}\,ds$.

2.2. Soient p et q deux réels tels que $2p-1 \geqslant 0$ et $2q-1 \geqslant 0$. Pour tout réel $a > 0$, on pose

$$I_p(a) = \int_0^a t^{2p-1}e^{-t^2}\,dt \quad \text{et} \quad D(a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \text{ et } x^2+y^2 \leqslant a^2\}.$$

On définit de même les intégrales $I_q(a)$ et $I_{p+q}(a)$.

2.2.1. Justifier que, pour tout réel $a > 0$,

$$I_p(a)I_q(a) = \iint_{[0,a]^2} x^{2p-1}y^{2q-1}\,e^{-x^2-y^2}\,dxdy.$$

2.2.2. Montrer que, pour tout réel $a > 0$,

$$\iint_{D(a)} x^{2p-1}y^{2q-1}\,e^{-x^2-y^2}\,dxdy = I_{p+q}(a)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta\ \sin^{2q-1}\theta\,d\theta.$$

2.2.3. En déduire que $\Gamma(p)\Gamma(q) = 2\Gamma(p+q)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta\ \sin^{2q-1}\theta\,d\theta$. On pourra encadrer l'intégrale double, sur le carré $[0,a]^2$, de la fonction $(x,y) \longmapsto x^{2p-1}y^{2q-1}\,e^{-x^2-y^2}$ par ses intégrales doubles sur $D(a)$ et $D(a\sqrt{2})$ puis opérer un passage à la limite.

Dans la suite, on admet que pour tout couple (p,q) de réels strictement positifs,

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 2\Gamma(p+q)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta\ \sin^{2q-1}\theta\,d\theta. \tag{1}$$

2.3. Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$ et montrer que, pour tout entier naturel n, $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2n)!\,\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}$. On pourra utiliser le résultat de la question 2.1.1.

3^{ème} partie
Fonctions de BESSEL

Pour tout réel $\lambda > -\frac{1}{2}$, on note J_λ la fonction de BESSEL d'ordre λ, définie sur $]0,+\infty[$ par

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda f_\lambda(x),\ x > 0,$$

f_λ étant la fonction définie au début de la première partie ; J_λ est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

Dans toute la suite de cette partie, λ désigne un réel strictement supérieur à $-\frac{1}{2}$.

3.1. Montrer que $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $x > 0$, et en déduire un équivalent de $J_{\frac{1}{2}}$ en 0^+.

3.2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $J_{\lambda+1}(x) = \dfrac{\lambda}{x}J_\lambda(x) - J_\lambda'(x)$.

3.3. On pose $H = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}$; f étant un élément de $\mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$, $[H^{n-1}(f)]'(x) = xH^n(f)(x)$ et que $J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.

3.4. Montrer que la fonction J_λ est solution de l'équation différentielle

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0. \tag{E_λ}$$

3.5. En utilisant le développement en série entières de la fonction cosinus, montrer que

$$J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\lambda+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k},\ x > 0.$$

3.6. Déterminer la limite de la fonction f_λ en 0^+ puis en déduire que $J_\lambda(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda$.

3.7. Une autre expression intégrale de J_n, $n \in \mathbb{N}$

3.7.1. Montrer que, pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^{n+2m}e^{-in\theta}\,d\theta = (-1)^m\binom{n+2m}{m}$.

3.7.2. Soit $x > 0$. Justifier que, pour tout réel α, $e^{ix\sin\alpha} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})^k$ puis en déduire que

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\theta - in\theta}\,d\theta, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.7.3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x, $J_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta$.

4ème partie
Application à l'étude de l'équation de KEPLER

En mécanique céleste, les lois de KEPLER montrent que les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers ; ces trajectoires sont décrites selon la loi des aires $r^2\frac{d\theta}{dt} = C$ (constante des aires) où r et θ sont des coordonnées polaires d'origine S (soleil) et t est le temps.

On montre que, par un choix convenable de l'origine et de l'unité de temps, la loi des aires est équivalente à l'équation

$$v = t + \varepsilon\sin v, \tag{2}$$

dite de KEPLER, où v représente *l'anomalie excentrique*, paramètre angulaire commode pour définir la position d'une planète dans son orbite elliptique, t représente une variable proportionnelle au temps et ε est l'excentricité de l'ellipse (voir figure de la dernière page).

L'objet de cette dernière partie du sujet est d'étudier l'équation (2) et de fournir des expressions de v en fonction de ε et de t à l'aide de deux méthodes différentes dont la deuxième est due à BESSEL qui introduisit dans ce but les fonctions qui portent son nom.

4.1. Pour tout $\varepsilon \in]-1,1[$, on note φ_ε la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi_\varepsilon(x) = x - \varepsilon \sin x, \; x \in \mathbb{R}.$$

4.1.1. Montrer que, pour tout $\varepsilon \in]-1,1[$, φ_ε est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

4.1.2. En déduire qu'il existe une **unique** fonction $v : \mathbb{R}\times]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, vérifiant

$$v(t,\varepsilon) = t + \varepsilon \sin(v(t,\varepsilon)), \; (t,\varepsilon) \in \mathbb{R}\times]-1,1[.$$

4.2. Premières propriétés de la fonction v

Soit $\varepsilon \in]-1,1[$.

4.2.1. Montrer que $v(0,\varepsilon) = 0$ et que $v(\pi,\varepsilon) = \pi$.

4.2.2. Montrer que la fonction $t \longmapsto v(t,\varepsilon)$, définie sur $\mathbb{R}$, est impaire.

4.2.3. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $v(t+2\pi,\varepsilon) = v(t,\varepsilon) + 2\pi$ et en déduire que la fonction $t \longmapsto v(t,\varepsilon) - t$ est 2π-périodique.

4.3. Régularité de la fonction v

On note $\mathcal{U}$ l'ouvert de $\mathbb{R}^3$ défini par $\mathcal{U} := \mathbb{R}\times]-1,1[\times\mathbb{R}$, et on désigne par g la fonction définie sur $\mathcal{U}$ par

$$g(t,\varepsilon,x) = x - \varepsilon \sin x - t, \quad (t,\varepsilon,x) \in \mathcal{U}.$$

4.3.1. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{U}$ et calculer sa dérivée partielle $\dfrac{\partial g}{\partial x}$. Cette dérivée partielle peut-elle s'annuler sur $\mathcal{U}$?

4.3.2. En appliquant le théorème des fonctions implicites à la fonction g, montrer que la fonction $v : (t,\varepsilon) \longmapsto v(t,\varepsilon)$, définie sur l'ouvert $\mathbb{R}\times]-1,1[$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet ouvert.

4.4. Expression de v à l'aide d'une série entière de la variable ε

4.4.1. Montrer que les dérivées partielles premières de v vérifient $\dfrac{\partial v}{\partial \varepsilon} = \dfrac{\partial v}{\partial t}.\sin v$.

4.4.2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}.\sin^n v\right) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial v}{\partial \varepsilon}.\sin^n v\right)$.

4.4.3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\partial^n v}{\partial \varepsilon^n} = \dfrac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}.\sin^n v\right)$.

4.4.4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout réel t, $\left|\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\sin^{n+1} t\right)\right| \leqslant (n+1)^n$, puis en déduire un minorant, indépendant de t, du rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\left(\sin^n t\right)\dfrac{z^n}{n!}$.

En fait, on peut démontrer par des arguments d'analyse complexes que

$$v(t,\varepsilon) = t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\left(\sin^n t\right)\frac{\varepsilon^n}{n!}, \quad (t,\varepsilon) \in \mathbb{R}\times]-1/e, 1/e[.$$

Il ne vous est pas demandé d'établir ce résultat.

4.5. Expression de v faisant intervenir une série de FOURRIER de la variable t

Soit $\varepsilon \in]-1,1[$; on rappelle que la fonction $v_\varepsilon : t \longmapsto v_\varepsilon(t) = v(t,\varepsilon) - t$, définie sur $\mathbb{R}$, est 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ et impaire. On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites de ses coefficients de FOURRIER trigonométriques.

4.5.1. Que vaut a_n, $n \in \mathbb{N}$? Justifier votre réponse.

4.5.2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer le coefficient b_n sous forme d'une intégrale faisant intervenir la fonction v_ε puis montrer que

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \cos(nu - n\varepsilon \sin u)\, du.$$

4.5.3. Montrer que, pour tout réel t,

$$v(t,\varepsilon) = t + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_n(n\varepsilon)}{n}\sin(nt).$$

4.5.4. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(J_n(n\varepsilon))^2}{n^2}$ et déterminer sa somme.

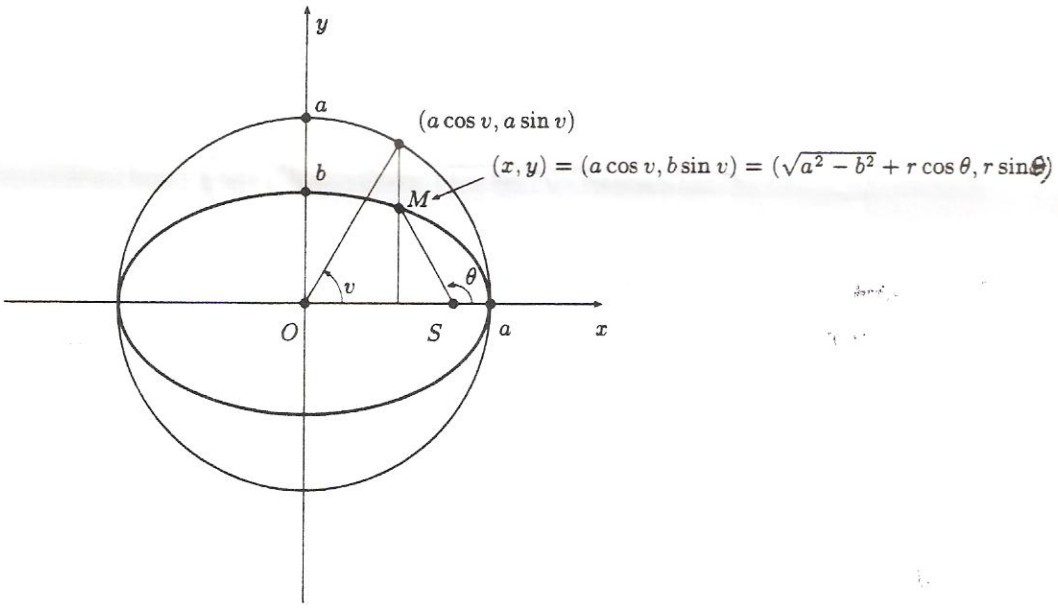

Figure : Ellipse de Kepler et anomalie excentrique v.

FIN DE L'ÉPREUVE