CPGE MOHAMMEDIA **01 Mai 2018**

CENTRALE.SUPÉLEC - M2 - MPSI

Corrigé par Taoufiki said

Q1. La fonction nulle est harmonique et pour $f, g \in \mathcal{H}(U)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a, par linéarité de Δ :

$$\Delta(\alpha f + g) = \alpha\Delta(f) + \Delta(g) = 0$$

Q2. Le fait que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ permet d'utiliser le théorème de Schwartz, pour écrire le laplacien d'une dérivée partille quelconque sous forme de dérivée partielle du laplacien, ce qui donnera bien sûr une fonction nulle, d'où le résultat.

Q3. On a : $\Delta(f^2)(x) = 2\left(\|\nabla(f(x))\|^2 + f(x)\Delta f(x)\right) = 2\|\nabla(f(x))\|^2$ (car f harmonique).
f^2 est donc harmonique sur U si et seulement si $\forall x \in U$, $\|\nabla(f(x))\|^2 = 0$, puisqu'on travaille dans un connexe par arcs, alors cette dernière condition est vérifiée seulement par les fonctions constantes. On en déduit que les fonctions f harmoniques de sorte que f^2 l'est aussi sont exactement les fonctions constantes sur U.

Q4. La fonction f définie par $f(x) = x_i$ est harmonique sur U.
Le produit de deux fonctions harmoniques ne l'est pas en général, par exemple, sur $\mathbb{R}^2$, la fonction g définie par $g(x, y) = x$ est harmonique mais g^2 n'est pas harmonique.

Q5. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = u''(x)v(y) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = u(x)v''(y)$$

comme f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$, alors $\forall (x, y)$, $u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = 0$.
Par hypothèse, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $u(a) \neq 0$ et $v(b) \neq 0$.
On pose : $\lambda = -\frac{u''(a)}{u(a)} = \frac{v''(b)}{v(b)}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u''(x) + \lambda u(x) = u''(x) + \frac{v''(b)}{v(b)}u(x) = \frac{1}{v(b)}\left(u''(x)v(b) + u(x)v''(b)\right) = 0$$

de même, on vérifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v''(x) - \lambda v(x) = 0$.

Q6. On sait bien comment résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations différentielles de la

question précédente selon la valeur de λ, on trouve :
Si $\lambda > 0$, alors

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ f(x,y) = \left(\alpha \cos(x\sqrt{\lambda}) + \beta \sin(x\sqrt{\lambda})\right) \left(\alpha' \exp(y\sqrt{\lambda}) + \beta' \exp(-y\sqrt{\lambda})\right)$$

Si $\lambda < 0$, alors

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ f(x,y) = \left(\alpha \exp(x\sqrt{-\lambda}) + \beta \exp(-x\sqrt{-\lambda})\right) \left(\alpha' \cos(y\sqrt{-\lambda}) + \beta' \sin(y\sqrt{-\lambda})\right)$$

Si $\lambda = 0$, alors

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ f(x,y) = (\alpha x + \beta)\,(\alpha' y + \beta')$$

Q7. Les composantes de la fonction $\phi : (r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, donc ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ avec $\phi(\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, donc $g = f \circ \phi$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Q8. Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) &= \cos(\theta).\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin(\theta).\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) &= -r\sin(\theta).\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos(\theta).\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{aligned}$$

Q9. Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) &= \cos^2\theta.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin^2\theta.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) &= r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r^2\cos^2\theta.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2r^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin\theta.\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

Q10. On a

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R} \ , \ r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r^2 \Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

donc

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ , \ \Delta f(x,y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R} \ , \ \Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R} \ , \ r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0 \end{aligned}$$

Q11. On note l'ensemble des fonctions harmoniques radiales de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par $\mathcal{H}_r(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{H}_r(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) &\Leftrightarrow f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \text{ et } g \text{ est indépendante de } \theta \\ &\underbrace{\Leftrightarrow}_{\textbf{par Q10}} \forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R} \ , \ r\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = 0 \end{aligned}$$

Les solutions de l'E.D.L.H $\quad ty' + y = 0 \ \ (E)$ sur $]0, +\infty[$ sont sous la forme $t \mapsto \frac{\alpha}{t}$ donc

$$\begin{aligned}
\partial f \in \mathcal{H}\partial_r(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) &\Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial r} \text{ est solution de } (E) \text{ et } \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R} \ , \ f(r\cos\theta, r\sin\theta) = g(r,\theta) = \alpha \ln(r) + \beta \\
&\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ , \ f(x,y) = \alpha \ln(\sqrt{x^2+y^2}) + \beta
\end{aligned}$$

Q12. La fonction f définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ , \ f(x,y) = \alpha \ln(\sqrt{x^2+y^2}) + \beta$$

avec $\alpha = \frac{a-b}{\ln r_1 - \ln r_2}$ et $\beta = \frac{b \ln r_1 - a \ln r_2}{\ln r_1 - \ln r_2}$, est harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (par **Q11**) et vérifie les deux autres conditions.

Q13. Soient $\rho > 0$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(\rho\cos\theta_0, \rho\sin\theta_0) \neq 0$ (car $f \neq 0$).
On a $u(\rho) \neq 0$ (et aussi $v(\theta_0) \neq 0$) donc

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \ , \ v(\theta) = \frac{f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)}{u(\rho)}$$

C'est bien une expression d'une fonction $2\pi-$périodique.

Q14. D'après **Q10.**,

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R} \ , \ r^2 u''(r) v(\theta) + u(r) v''(\theta) + r u'(r) v(\theta) = 0$$

Le réel $\lambda = \frac{-v''(\theta_0)}{v(\theta_0)} = \frac{\rho u'(\rho) + \rho^2 u''(\rho)}{u(\rho)}$ convient, en effet :

$$\forall r \in \mathbb{R}^{*+} \ , \ r^2 u''(r) + r u'(r) + \frac{v''(\theta_0)}{v(\theta_0)} u(r) = 0$$

et aussi

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \ , \ v''(\theta) = \frac{-\rho u'(\rho) - \rho^2 u''(\rho)}{u(\rho)} v(\theta)$$

Q15. Les solutions de $II.2$ sont les fonctions affines, donc ses solutions qui sont $2\pi-$périodiques sont exactement les constantes.

Q16. L'équation est déjà vue en **Q11.**, ses solutions sur $\mathbb{R}^{*+}$ sont exactement les fonctions de forme $z : r \mapsto \alpha \ln r + \beta$.

Q17. Les fonctions harmoniques à variables polaires séparables dans ce cas sont sous la forme $(r,\theta) \mapsto \alpha \ln r + \beta$ (car v est constante).

Q18. L'étude faite en **Q6.**, permet de dire que, $(II.2)$ admet des solutions $2\pi-$périodiques non nulles si et seulement si $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}^*$, et dans ce cas

$$z(\theta) = \alpha \cos(\theta\sqrt{\lambda}) + \beta \sin(\theta\sqrt{\lambda}) \quad \text{ avec } (\alpha, \beta) \neq (0,0)$$

Q19. On pose $Z(t) = z(e^t)$, $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \ , \ Z'(t) = e^t z'(e^t) \text{ et } Z''(t) = e^{2t} z''(e^t) + e^t z'(e^t)$$

donc

$$(II.1) \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R} \ , \ Z''(t) - \lambda Z(t)$$

La dernière équation est déjà traitée pour répondre à **Q6.**. Dans le cas où $\lambda > 0$, on a :

$$Z(t) = \alpha \exp(t\sqrt{\lambda}) + \beta \exp(-t\sqrt{\lambda})$$

par suite

$$\forall r > 0 \ , \ z(r) = \alpha . r^{\sqrt{\lambda}} + \beta . r^{-\sqrt{\lambda}} \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \neq (0,0)$$

Q20. On sait que $\lim\limits_{r \to 0^+} r^{\sqrt{\lambda}} = 0$ et $\lim\limits_{r \to 0^+} r^{-\sqrt{\lambda}} = +\infty$, donc les solutions prolongeables en 0 sont données par

$$\forall r > 0 \ , \ z(r) = \alpha . r^{\sqrt{\lambda}}$$

Q21. U est bornée donc il est inclus dans une boule fermée, son adhérence $\overline{U}$ est incluse dans la même boule, donc elle est bornée puis compacte (car fermée d'un evn de dimension finie). Par continuité de f, il existe $x_0 \in \overline{U}$ vérifiant

$$f(x_0) = \max_{x \in \overline{U}} f(x)$$

Q22. Supposons que $x_0 \in U$.
On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x_0) = \Delta f(x_0) > 0$ donc il existe $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$.
On pose $\varphi(t) = f(x_0 + te_i)$, $t \in \mathbb{R}$ avec e_i le $i-$ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a : φ est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0 et $\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$. Il existe donc un réel $\eta > 0$ tel que

$$\forall t \in]-\eta, \eta[\ , \ x_0 + te_i \in U \text{ et } \varphi''(t) > 0$$

donc φ' est strictement croissante sur $]-\eta, \eta[$. Comme x_0 est un point d'extremum de f dans un ouvert alors il est un point critique puis $\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$ donc pour tout $t \in]-\eta, 0[$, $\varphi'(t) < \varphi'(0) = 0$ donc φ est strictement décroissante sur $]-\eta, 0]$ donc $\forall t \in]-\eta, 0[$, $\varphi(t) > \varphi(0)$ c'est à dire que $\forall t \in]-\eta, 0[$, $f(te_i + x_0) > f(x_0)$ ce qui est contredit le fait que $f(x_0)$ est le maximum de f sur $\overline{U}$. D'où $x_0 \in \partial U$.
On a : $\forall x \in \partial U$, $f(x) \leq f(x_0)$ et $x_0 \in \partial U$ donc $f(x_0) = \max\limits_{x \in \partial U} f(x) = \sup\limits_{x \in \partial U} f(x)$.
On en déduit donc que :

$$\forall x \in U \ , \ f(x) < f(x_0) = \sup_{y \in \partial U} f(y)$$

car $f(x) = f(x_0) = \sup\limits_{y \in \overline{U}} f(y)$ entraîne que $x \in \partial U$.

Q23. Soit $\varepsilon > 0$. L'application $x \mapsto \|x\|^2$ est polyomiale donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$, donc g_ε est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\overline{U}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car f l'est.
D'autre part

$$\forall x \in U \ , \ \Delta g_\varepsilon(x) = \underbrace{\Delta f(x)}_{=0 \text{ car } f \in \mathcal{H}(U)} + 2\varepsilon = 2\varepsilon > 0$$

Q24. g_ε vérifie les conditions de $III.A$ donc

$$\forall x \in U \ , \ g_\varepsilon(x) < \sup_{y \in \partial U} g_\varepsilon(y)$$

donc

$$\forall x \in U \ , \ f(x) + \varepsilon\|x\|^2 < \sup_{y \in \partial U} f(y) + \varepsilon \sup_{y \in \partial U} \|y\|^2$$

Ceci pour tout $\varepsilon > 0$.
Le passage à la limite (en fixant $x \in U$) lorsque ε tend vers zéro entraîne

$$\forall x \in U \ , \ f(x) \leq \sup_{y \in \partial U} f(y)$$

Q25. On pose $f = f_1 - f_2$.
Les fonctions f et $-f$ vérifiant les conditions de **Q23.** et **Q24.** avec

$$\sup_{y \in \partial U} f(y) = \sup_{y \in \partial U} (-f)(y) = 0$$

D'où

$$\forall x \in U \ , \ f(x) \leq 0 \text{ et } -f(x) \leq 0$$

Q26. Soit $(x_0, y_0) \in D(0, R)$ et $\rho = \|(x_0, y_0)\|$. on prend $r \in]\rho, R[$, $I =]-\sqrt{r^2 - y_0^2}, \sqrt{r^2 - y_0^2}[$ et $u_n(x) = a_n(x + iy_0)^n$, $x \in I$, $n \in \mathbb{N}$.
Les u_n sont de $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge simplement sur I et $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} u_n'$ converge normalement (puis uniformément) sur I car

$$\forall x \in I \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ , \ |u_n(x)| \leq n|a_n|r^{n-1} \ \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n|a_n|r^{n-1} \text{ converge}$$

D'où $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (en particulier en x_0) avec $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right)' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n'$, autrement dit $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et continue en (x_0, y_0) avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x_0 + iy_0)^{n-1} \qquad (*)$$

De même façon, on montre que $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe et continue en (x_0, y_0) avec

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} ina_n(x_0 + iy_0)^{n-1} \qquad (**)$$

Les égalités $(*)$ et $(**)$ sont valables pour tout $(x_0, y_0) \in D(0, R)$ donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D(0, R)$ et les dérivées partielles sont aussi développables en série entière sur $D(0, R)$, par suite $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ existent avec $\forall (x, y) \in D(0, R)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n(x+iy)^{n-2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n(x+iy)^{n-2}$$

D'où f est harmonique sur $D(0, R)$ (la définition d'une fonction harmonique reste la même pour une fonction à valeurs complexes) .
Q27. D'après la question précédente, f est harmonique sur $D(0, R)$, donc

$$\forall (x, y) \in D(0, R) \ , \ 0 = \Delta f(x, y) = \Delta u(x, y) + i\Delta v(x, y)$$

donc $\forall (x, y) \in D(0, R) \ , \ \Delta u(x, y) = \Delta v(x, y) = 0$, d'où u et v sont harmoniques sur $D(0, R)$.
Q28. Posons $\varphi = \frac{1}{f}$. Sur $D(0, R)$, on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \underbrace{\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{f^2} = \frac{-i\frac{\partial f}{\partial y}}{f^2}}_{f \text{ de } \mathcal{C}^1 \text{ et D.E.S.E.}} = i\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

D'où φ est D.E.S.E sur $D(0, R)$.
Q29. Après calcul, on trouve :

$$\Delta(uv) = (\Delta u)v + u(\Delta v) + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Par le résultat admis, on a $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$, donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

donc $\Delta(uv) = 0$ sur $D(0, R)$, d'où l'harmonicité de uv sur $D(0, R)$.
Q30. Par théorème de Schwartz et harmonicité de g, on a

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - i\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - i\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$$

par suite,

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - i\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = i\frac{\partial h}{\partial x}$$

d'où h est D.E.S.E. sur $D(0,R)$.

Q31. Supposons que g est harmonique sur $D(0,R)$. Par **Q30.**, h est D.E.S.E. sur $D(0,R)$ de sorte que

$$\forall (x,y) \in D(0,R) \ , \ h(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x+iy)^n$$

On sait que $R_{cv}\left(\sum_{n\geq 0} \frac{\alpha_n}{n+1} z^{n+1}\right) = R_{cv}\left(\sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n\right) \geq R$, donc on définit la fonction H par

$$\forall (x,y) \in D(0,R) \ , \ H(x,y) = g(0,0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n+1}(x+iy)^{n+1}$$

et considère $U = Re(H)$ et $V = Im(H)$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x+iy)^n \\
&= h(x,y) \\
&= \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)
\end{aligned}$$

donc $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}$. De même, on montre que $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}$ et on en déduit que

$$\forall (x,y) \in D(0,R) \ , \ U(x,y) = g(x,y) + cte$$

puisque $U(0,0) = g(0,0)$ alors $cte = 0$ puis $g = Re(H)$.

Q32. Soit $r \in]0,R[$. Pour tout $t \in [0,2\pi]$, $|a_n(r\cos t + ir\sin t)^n| \leq |a_n| r^n$ et $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ C.A. donc $\sum_{n\geq 0} a_n r^n e^{int}$ converge normalement puis uniformèment sur $[0,2\pi]$, ce qui permet de permuter les signes $\int$ et $\sum$ et avoir :

$$\int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{int}dt}_{=2\pi\delta_{0,n}} = 2\pi a_0 = 2\pi f(0,0)$$

Le cas $r = 0$ est trivial.
Q33. Soit $g \in \mathcal{H}(D(0,R))$. Par **Q31.**, il existe H D.E.S.E. telle que $g = Re(H)$. On a :

$$2\pi g(0,0) = Re(2\pi H(0,0)) = Re\left(\int_0^{2\pi} H(r\cos t, r\sin t)dt\right) = \int_0^{2\pi} g(r\cos t, r\sin t)dt$$

Q34. Soit $r \in]0,R[$. La fonction $t \mapsto f(r\cos t, r\sin t)$ est continue sur le segment $[0,2\pi]$ donc bornée, par périodicité, on a $M := \sup\limits_{t\in[0,2\pi]} |f(r\cos t, r\sin t)| = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(r\cos t, r\sin t)|$. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$|2\pi f(0,0)| = |\int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)dt| \leq \int_0^{2\pi} |f(r\cos t, r\sin t)|dt \leq M\int_0^{2\pi} dt = 2\pi M$$

Q35. Le résultat et la manières sont analogues.
Q36. Supposons que $|f|$ admet un maximum en $(0,0)$. Pour tout $r \in]0,R[$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \left(|f(0,0)| - |f(r\cos t, r\sin t)|\right) dt &= 2\pi|f(0,0)| - \int_0^{2\pi} |f(r\cos t, r\sin t)|dt \\ &\leq 2\pi|f(0,0)| - |\int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)dt| = 0\end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto |f(0,0)| - |f(r\cos t, r\sin t)|$ est continue positive, d'intégrale nulle sur $[0,2\pi]$, donc elle est nulle sur $[0,2\pi]$, et on a :

$$\forall t \in [0,2\pi]\ ,\ |f(r\cos t, r\sin t)| = |f(0,0)|$$

Ceci est pour tout $r \in]0,R[$, donc $|f|$ est constante sur $D(0,R)$ puis $|f|^2 = u^2 + v^2$ l'est aussi. Puisque u et v sont harmoniques, alors

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta(|f|^2) \\ &= \Delta(u^2) + \Delta(v^2) \\ &= 2\left(u(\Delta u) + v(\Delta v) + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2\right) \\ &= 2\left(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2\right)\end{aligned}$$

D'où ∇u et ∇v sont nuls sur le connexe par arcs $D(0,R)$, ce qui donne que u et v sont constantes puis f est constante.
Q37. Soit $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$ tel que $n \geq 1$ et $P(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
On a : $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |P(z)| = \lim\limits_{|z|\to+\infty} |a_n||z|^n \left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_0}{z^n}\right| = +\infty$, par définition de la limite, il existe $A > 0$ vérifiant

$$|z| > A \quad\Rightarrow\quad |P(z)| > |P(0)| + 1 > |P(0)|$$

Par continuité de P sur le compact $\overline{D}(0,A)$, il existe $z_0 = x_0 + iy_0$ tel que

$$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \ , \ |z_0| \leq A \text{ et } \forall z \in \overline{D}(0,A) \ , \ |P(z)| \leq |P(z_0)|$$

On pose :

$$F(x,y) = \frac{1}{P(x_0+x, y_0+z)} \ , \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

On a $(x,y) \mapsto P(x_0+x, y_0+y)$ est D.E.S.E et ne s'annule pas sur $D(0,1)$ (par exemple), donc F l'est aussi (par **Q28.**).
D'autre part, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\frac{1}{|P(z)|} \leq \frac{1}{|P(z_0)|}$, donc $|F|$ admet un maximum en $(0,0)$, donc F est constante sur $D(0,1)$ (par **Q36.**).
P est constant sur $D(z_0, 1)$, donc $P - P(z_0)$ admet une infinité de zéros puis il est nul, d'où $P = P(z_0)$, ce qui est absurde.
Q38. Soient $|z| < 1$ et $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} &= \frac{2e^{it}}{e^{it}-z} - 1 \\
&= \frac{2}{1-ze^{-it}} - 1 \\
&= -1 + 2\sum_{n=0}^{+\infty} (ze^{-it})^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2e^{-int} z^n
\end{aligned}$$

Soient $z \in D(0,1)$ et $r = |z|$. Pour tout $t \in [0, 2\pi]$

$$h(t)\mathcal{P}(t,z) = h(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} 2h(t)e^{-int} z^n$$

Cette série converge normalement puis uniformément sur $[0, 2\pi]$ car h est bornée (continue sur un segment) et $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ converge, donc

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} h(t)dt + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(2\int_0^{2\pi} h(t)e^{-int}dt\right) z^n\right)$$

D'où

$$\forall (x,y) \in D(0,1) \ , \ g(x+iy) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} h(t)dt + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(2\int_0^{2\pi} h(t)e^{-int}dt\right) (x+iy)^n\right)$$

Q39. Soit $|z| < 1$. En utilisant la convergence uniforme de la série $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2e^{-int}z^n$ sur $[0, 2\pi]$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{2\pi} e^{-int}dt = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{P}(t,z)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2e^{-int}z^n\right)dt \\
&= Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2e^{-int}z^n)dt\right) \\
&= Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} 2z^n \int_0^{2\pi} e^{-int}dt\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Q40. Pour tout $z \in D(0,1)$, la fonction $t \mapsto h(t)\mathcal{P}(t,z)dt$ est $2\pi-$périodique, le changement de variable $s = t - \varphi$ nous donne l'égalité voulue.

Q41. On a :

$$\frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}} = \frac{2}{1 - re^{i(\theta - t)}} - 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{1 - re^{i(\theta - t)}} = \frac{1 - r\cos(\theta - t) + ir\sin(\theta - t)}{(1 - r\cos(\theta - t))^2 + r^2\sin^2(\theta - t)}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(t, re^{i\theta}) &= Re\left(\frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}}\right) \\
&= \frac{2 - 2r\cos(\theta - t)}{(1 - r\cos(\theta - t))^2 + r^2\sin^2(\theta - t)} - 1 \\
&= \frac{2 - 2r\cos(\theta - t)}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} - 1 \\
&= \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t - \theta) + r^2}
\end{aligned}$$

Q42. On prend $\delta \in]0, \pi[$. En faisant le changement de variable $s = t - \varphi$, on obtient :

$$\int_{\varphi+\delta}^{\varphi-\delta+2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t - \theta) + r^2}dt = \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(s + \varphi - \theta) + r^2}ds$$

On suppose que $|\varphi - \theta| < \frac{\delta}{2}$. On a pour tout $s \in [\delta, 2\pi - \delta]$,

$$0 \leq \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(s + \varphi - \theta) + r^2} \leq \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\frac{\delta}{2}) + r^2}$$

d'où
$$0 \leq \int_{\varphi-\delta}^{\varphi-\delta+2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}dt \leq \frac{2(\pi-\delta)(1-r^2)}{1-2r\cos(\frac{\delta}{2})+r^2}$$
Par théorème de gendarmes, on obtient la limite cherchée. **Q43.** La formule de **Q40.** nous donne que

$$\forall t \in \mathbb{R} \ , \ \forall z \in D(0,1) \ , \ \mathcal{P}(t,z) \geq 0$$

On fixe $\varphi \in \mathbb{R}$, $z \in D(0,1)$ et $\varepsilon > 0$. La fonction h est continue sur $[\varphi-\pi, \varphi+\pi]$ elle est donc uniformément continue par théorème de Heine, donc, il existe $\delta \in]0,\pi[$ tel que
$$|t-\varphi| < \delta \quad \Rightarrow \quad |h(t)-h(\varphi)| < \varepsilon$$
D'après **Q39.** et **Q40.**, on a :

$$\begin{aligned}
|g(z)-h(\varphi)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\varphi-\delta}^{\varphi-\delta+2\pi} (h(t)-h(\varphi))\mathcal{P}(t,z)dt\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi-\delta}^{\varphi-\delta+2\pi} |h(t)-h(\varphi)|\mathcal{P}(t,z)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} |h(t)-h(\varphi)|\mathcal{P}(t,z)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi+\delta}^{\varphi-\delta+2\pi} |h(t)-h(\varphi)|\mathcal{P}(t,z)dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} \mathcal{P}(t,z)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi+\delta}^{\varphi-\delta+2\pi} (|h(t)|+|h(\varphi)|)\mathcal{P}(t,z)dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{\varphi-\delta}^{\varphi-\delta+2\pi} \mathcal{P}(t,z)dt + \frac{\sup_{\mathbb{R}}|h|}{\pi}\int_{\varphi+\delta}^{\varphi-\delta+2\pi} \mathcal{P}(t,z)dt \\
&= \varepsilon + \frac{\sup_{\mathbb{R}}|h|}{\pi}\int_{\varphi+\delta}^{\varphi-\delta+2\pi} \mathcal{P}(t,z)dt
\end{aligned}$$

Q44. • Montrons tout d'abord l'unicité de la solution du problème de Dirichlet : Si f_1 et f_2 sont deux solutions du problème de Dirichlet. D'aprés **Q25.**, comme f_1 et f_2 sont continues sur $\overline{D}(0,1)$, de classe $\mathcal{C}^2$ et harmoniques sur $D(0,1)$ et égales sur $\partial(D(0,1))$ alors elles sont égales sur $D(0,1)$.
• On pose
$$f(x,y) = \begin{cases} g(x+iy) & \text{si} \quad (x,y) \in D(0,1) \\ h(t) & \text{si} \quad (x,y) = (\cos t, \sin t) \end{cases}$$
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur $D(0,1)$ (par **Q38.**), il reste à vérifie sa continuité en tout point $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ de $\partial(D(0,1))$.

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, d'après **Q43.**, il existe $\delta \in]0, \pi[$ tel que $\forall (x, y) \in D(0,1)$

$$|f(x,y) - f(\cos\varphi, \sin\varphi)| = |g(x+iy) - h(\varphi)| \leq \frac{\sup\limits_{\mathbb{R}} |h|}{\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, x+iy)dt + \varepsilon$$

Le premier terme du second membre, tend vers 0 lorsque (x, y) tend vers $(\cos\varphi, \sin\varphi)$, donc il existe $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in D(0,1)\ ,\ \|(x,y) - (\cos\varphi, \sin\varphi)\| < \alpha \ \Rightarrow\ \frac{\sup\limits_{\mathbb{R}} |h|}{\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, x+iy)dt < \varepsilon$$

La continuité de h en φ entraîne qu'il existe $\alpha' \in]0, \frac{\pi}{2}[$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ |t - \varphi| < \alpha' \ \Rightarrow\ |h(t) - h(\varphi)| < 2\varepsilon$$

Maintenant, on pose $\gamma = \min(\alpha, 2\sqrt{1-\cos\alpha'}) > 0$ et on prend $(x, y) \in \overline{D}(0, 1)$ tel que $\|(x, y) - (\cos\varphi, \sin\varphi)\| < \gamma$, alors ou bien $\|(x, y)\| < 1$, et dans ce cas,

$$|f(x,y) - f(\cos\varphi, \sin\varphi)| \leq 2\varepsilon$$

ou bien $\|(x, y)\| = 1$ et dans ce cas, il existe $t \in [\varphi - \pi, \varphi + \pi]$ tel que $(x, y) = (\cos t, \sin t)$. On a $2\sqrt{1 - \cos(t-\varphi)} = \|(x, y) - (\cos\varphi, \sin\varphi) < \gamma$ donc

$$\cos(\underbrace{|t-\varphi|}_{\in[0,\pi]}) = \cos(t-\varphi) > \cos(\underbrace{\alpha'}_{\in]0,\frac{\pi}{2}[})$$

Par stricte décroissance de cos sur $[0, \pi]$, on obtient $|t - \varphi| < \alpha'$ puis

$$|f(x,y) - f(\cos(\varphi), \sin(\varphi))| = |h(t) - h(\varphi)| < 2\varepsilon$$

donc pour tout $(x, y) \in \overline{D}(0, 1)$ tel que $\|(x, y) - (\cos\varphi, \sin\varphi)\| < \gamma$, on a :

$$|f(x,y) - f(\cos(\varphi), \sin(\varphi))| < 2\varepsilon$$

d'où la continuité de f en $(\cos\varphi, \sin\varphi)$.

Pour vos remarques, contactez moi sur "taoufiki-maths@hotmail.fr

Je publie mes propositions seulement sur https ://concours-maths-cpge.fr/

ou sur taoufiki.jimdo.com pour pouvoir mettre à jour