Espaces préhilbertiens réels

Exercice 1

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons l'application Φ définie par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \Phi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$$

Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2) $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$. Considérons l'application Ψ définie par :

$$\forall f, g \in E, \Psi(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1 - t^2)dt$$

Montrer que Ψ est un produit scalaire sur E.

Exercice 2

$\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
Notons $e_1 = (1, 0, 1, 0), e_2 = (1, -1, 1, -1)$ et $F = vect(e_1, e_2)$

1) Déterminer une base orthonormale de F.
2) Déterminer $d(x, F)$, où $x = (1, 1, 1, 1)$

Exercice 3

On considère l'application définie sur $M_n(\mathbb{R})^2$ par :

$$(A|B) = tr({}^tA.B)$$

1) Montrer que cette application est un produit scalaire pour lequel la base canonique est orthonormée. On note $||.||$ la norme associée.
2) Montrer que

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), |tr(A)| \leq \sqrt{n}||A||$$

3) Quel l'orthogonal de S, l'espace des matrices symétriques ?
4) En déduire

$$inf_{(m_{ij})\in S} \left(\sum_{1\leq i,j\leq n} (A_{ij} - m_{ij})^2 \right)$$

$A = (A_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ étant une matrice fixée.

Exercice 4

Calculer le minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(a, b, c) = \int_{0}^{+\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 e^{-2x} dx$$

Exercice 5

$E = \mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel. Q est le plan d'équation cartésienne

$$Q : \; x - y + z = 0$$

1) Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur Q.
2) Calculer $d(A, Q)$, où $A = (-1, 2, 1)$

Exercice 6

$(E, < \cdot | \cdot >)$ un espace euclidien.

1) a un vecteur non nul de E et $D = vect(a)$.
   Expliciter $P_D(x)$, la projection orthogonale de x sur D.
2) Soit H l'hyperplan orthogonal au vecteur a.
   Expliciter $P_H(x)$.
3) $E = \mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel. P est le plan d'équation cartésienne $P : \; x - y + z = 0$.
   Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur P.
   Comparer avec le résultat trouvé dans : Exercice 5. 1)

Exercice 7

$M_2(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire : $(A|B) = tr({}^tA.B)$

$H = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / tr(M) = 0\}$. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) a) Justifier que H est un hyperplan de $M_2(\mathbb{R})$
   b) Déterminer $d(A, H)$.
2) a) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.
   b) Déterminer une base de $F^\perp$
   c) Déterminer la projection orthogonale de A sur $F^\perp$

Exercice 8

E espace euclidien. Soit f un endomorphisme orthogonal sur E.
Montrer que l'orthogonal d'un sous-espace stable par f est aussi stable par f.

Exercice 9

E espace euclidien. Soit f un endomorphisme symétrique sur E ; càd vérifiant :

$$\forall x, y \in E, \; < f(x) | y > = < x | f(y) >$$

1) Montrer que l'orthogonal d'un sous-espace stable par f est aussi stable par f.
2) Montrer que Im(f) et ker(f) sont supplémentaires orthogonaux

Exercice 10

E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \succeq 2$. Soit f un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe une droite ou plan stable par f.

Exercice 11

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $ker(A) = ker({}^tA.A)$
2) En déduire que :
   a) $rg(A) = rg({}^tA.A) = rg(A.{}^tA)$
   b) $Im(A) = Im(A.{}^tA)$

Exercice 12

$M_{n1}(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne canonique, et $||.||$ la norme associée.
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), ||AX|| \preceq ||X||$$

1) Montrer que
$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), ||{}^tA.X|| \preceq ||X||$$
   Indice : Vous pouvez utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz
2) En déduire que
$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \ , \ AX = X \Leftrightarrow \ {}^tA.X = X$$
3) Montrer que $ker(A - I_n)$ et $Im(A - I_n)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $M_{n1}(\mathbb{R})$

Exercice 13

E un espace euclidien et a et b deux vecteurs unitaires.
Soit f l'endomorphisme de E défini par : $f(x) = x - < a|x > b$

1) Montrer que
$$< a|b >= 1 \Leftrightarrow a = b$$
2) Montrer que
$$f \ est \ inversible \Leftrightarrow a \neq b$$
3) Déterminer f^{-1} quand c'est possible

Exercice 14

Considérons l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ canoniquement orienté (càd que sa base canonique est une bond)
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = z, x, y)$.
Montrer que f est une rotaion et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 15

E espace euclidien orienté de dimension 3. Soit B une bond de E.
Soit f l'endomorphisme de E tel que $mat_B(f) = A$.
Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques :

1) $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$

2) $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 16

Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme symétrique sur E.

1) Montrer que
$$(\forall x \in E, < f(x)|x >= 0) \Leftrightarrow f = 0$$

2) On pose $M = sup_{\lambda \in S_p(f)}(|\lambda|)$. Montrer que
$$\forall x \in E, ||f(x)|| \preceq M.||x||$$

Exercice 17

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que

1) A est diagonalisable dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow A^2 = I_n$

2) A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$

Exercice 18

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Soit λ une valeur propre complexe de A.
Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})|\{0\}$ tel que $AX = \lambda X$.
Montrer que $|\lambda| = 1$.
Indice : *vous pouvez calculer de deux façons* ${}^t(\overline{AX}).(AX)$

Exercice 19

E un espace euclidien et f un endomorphisme symétrique de E.
Montrer que
$$(f - id_E)^2 = 0 \Leftrightarrow f = id_E$$

Exercice 20

E un espace euclidien et f et g deux endomorphismes symétriques de E.
Montrer que : $fg = gf \Leftrightarrow fg$ est symétrique

Exercice 21

E un espace euclidien de dimension $n \succeq 2$ et a un vecteur unitaire de E. Soit $k \in \mathbb{R}^*$. Soit f l'endomorphisme de E défini par $f(x) = x + k < x|a > a$.

1) Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E
2) Etudier les valeurs propres et les sous-espaces propres de E.

Exercice 22

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1) Dites pourquoi la matrice ${}^tA.A$ est diagonalisable.
2) Montrer que les valeurs propres de ${}^tA.A$ sont réelles positives.

Exercice 23

Soit A une matrice symétrique et nilpotente de $M_n(\mathbb{R})$.
Déterminer A.

Exercice 24

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente vérifiant ${}^tA.A = A.{}^tA$.

1) Montrer que ${}^tA.A = 0$
2) En déduire que $A = 0$

Exercice 25

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $B = \frac{1}{2}({}^tA + A)$.
On note α la plus petite valeur propre de B et β la plus grande.

1) Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Comparer ${}^tX.A.X$ et ${}^tX.B.X$
2) Montrer que

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ \alpha\ {}^tX.X \preceq\ {}^tX.A.X \preceq \beta\ {}^tX.X$$

3) En déduire que $S_p(A) \subset [\alpha, \beta]$

Exercice 26

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$.

1) Justififer que $S_p(A) \neq \emptyset$
2) On note α la plus petite valeur propre de A et β la plus grande.
   Montrer que
$$\forall 1 \preceq i \preceq n,\ \alpha \preceq a_{ii} \preceq \beta$$