# Formules de Stirling

L'objectif de ce problème est de déterminer un équivalent simple à $n!$ quand $n \to +\infty$.

*Partie I – Une limite*

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t$

1.a Calculer $I_0$, $I_1$ et $I_2$.

1.b Montrer que la suite $(I_n)$ est décroissante et strictement positive.

1.c A l'aide d'un changement de variable adéquate, établir : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = J_n$.

2.a Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

2.b En encadrant $\dfrac{I_{n+1}}{I_n}$, montrer que $I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$.

2.c Observer que la suite de terme général $(n+1)I_n I_{n+1}$ est constante.

2.d En déduire un équivalent simple de $I_n$ quand $n \to +\infty$.

3.a Pour $p \in \mathbb{N}$, exprimer $I_{2p}$ et $I_{2p+1}$ à l'aide de nombres factoriels.

3.b En observant que $\dfrac{(2p+1)I_{2p+1}}{(2p)I_{2p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$ obtenir $\pi = \lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{2^{4p}(p!)^4}{p((2p)!)^2}$.

*Partie II – En encadrement*

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ concave. On note $M = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f''(t)|$.

On introduit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction affine déterminée par $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$.

1.a Exprimer, pour tout $t \in [a,b]$, $g(t)$ en fonction de $a$, $b$ et $f$.

1.b Calculer $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Justifier par un argument géométrique, que $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. On désire maintenant établir la propriété : $\forall t \in [a,b], f(t) - g(t) \le M\dfrac{(t-a)(b-t)}{2}$

   Celle-ci est clairement vérifiée pour $t = a$ ou $t = b$. Il reste à l'étudier pour $t \in ]a,b[$.

   Pour cela, on introduit $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $h(x) = f(x) - g(x) - K(x-a)(x-b)$ où la constante $K$ est choisie de sorte que $h(t) = 0$.

3.a Justifier que $h$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et exprimer $h''(x)$.

3.b En exploitant le théorème de Rolle, établir qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $h''(c) = 0$.

3.c En déduire qu'alors $|K| \le \dfrac{M}{2}$ puis l'inégalité voulue.

4. Etablir alors que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \le \dfrac{M(b-a)^3}{12}$.

5. En appliquant le résultat précédent à la fonction $f : x \mapsto \ln x$ sur $[n, n+1]$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) établir :

   $0 \le \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\left(\ln(n+1) - \ln(n)\right) - 1 \le \dfrac{1}{12n^2}$.

*Partie III – Formule de Stirling*

Cette partie exploite les résultats des questions I.3.b et II.5 qui pourront, au besoin, être admis.

On pose pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ : $u_n = \ln\left(n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}\right) - \ln n!$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{12(n-1)}$ .

1. Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.

   On note $C$ leur limite commune

2. En calculant de deux manières $\lim\limits_{n\to\infty} 2u_n - u_{2n}$ montrer que $C = -\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$ .

3. Conclure : $n! \sim \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}$ .