Concours National Commun

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 2
Session 2024 - Filière MP

L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.
Durée: 4 beures

Exercice

(Noté 4 points sur 20)

1. On désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 3. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ a base canonique de $\mathbb{R}^3$ et par I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices suivantes:

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **a)** Vérifier que $PQ = 4\mathrm{I}_3$.

b) En déduire que P est une matrice inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1}.

3. On considère les vecteurs suivants :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que u est un vecteur propre de la matrice A dont on précisera la valeur propre α correspondante.

b) Montrer que v et w sont deux vecteurs propres de la matrice A associés à la même valeur propre β dont on précisera sa valeur.

c) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à préciser telle que $A = PDP^{-1}$.

4. **a)** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n, A^n = PD^nP^{-1}$.

b) Déterminer, pour tout entier naturel n, D^n en fonction de n.

c) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de A^n en fonction de n sous forme d'un tableau.

Problème.

Dans tout le problème $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on désigne par E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n, $n \geq 1$ et par $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de E. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}, GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $f^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$ où id_E désigne l'application identité de E. On note $\chi_f(X) = \det(X\ \mathrm{id}_E - f)$ le polynôme caractéristique de f et on rappelle que $\chi_f(f) = 0$ où 0 désigne l'application nulle de E.
Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra introduire le polynôme caractéristique de M défini par $\chi_M(X) = \det(X\mathrm{I}_n - M)$.
On dit que f est un endomorphisme nilpotent s'il existe un entier naturel non nul p tel que $f^p = 0$, le plus petit entier naturel non nul p vérifiant cette propriété est appelé indice de nilpotence de f.

Partie 1: Noyaux itérés

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on note pour tout entier naturel $k, \mathcal{N}_k = \operatorname{Ker}\left(f^k\right)$ et $\mathcal{I}_k = \operatorname{Im}\left(f^k\right)$.

1. Montrer que la suite $(\mathcal{N}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(\mathcal{I}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.

2. En déduire que $(\dim \mathcal{N}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.

3. Justifier l'existence d'un plus petit entier naturel q tel que $\mathcal{N}_q = \mathcal{N}_{q+1}$.

4. Montrer que $\mathcal{I}_q = \mathcal{I}_{q+1}$.

5. Montrer que $\mathcal{N}_q \oplus \mathcal{I}_q = E$,

6. On considère pour tout entier naturel k, φ_k la restriction de f a $\mathcal{I}_k$.

a) Montrer que $\dim \mathcal{I}_k - \dim \mathcal{I}_{k+1} = \dim\left(\operatorname{Ker}(f\ ) \cap \mathcal{I}_k\right)$.

b) En déduire que la suite $(\dim \mathcal{N}_{k+1} - \dim \mathcal{N}_k\ )_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Partie 2 : Les endomorphismes nilpotents de rang $n-1$

Soit U une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de rang $n-1$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé a U.

1. Soient r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $\operatorname{Im}(u^r)$.

a) Vérifier que $\operatorname{Im}(v) = \operatorname{Im}\left(u^{s+r}\right)$.

b) Montrer que $\operatorname{Ker}(v) \subset \operatorname{Ker}(u^s)$.

c) Montrer que $\dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^{r+s}\right)\right) \leq \dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^r\right)\right) + \dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^s\right)\right)$.

d) En déduire que pour tout entier naturel $i, \dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^i\right)\right) \leq i$.

2. On suppose de plus que $U^n = 0$.

a) Montrer que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n, \dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^i\right)\right) = i$.

b) Montrer que l'indice de nilpotence de u est égal à n.

c) En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que $\mathcal{B}_e = \left(e, u(e), \ldots, u^{n-1}(e)\right)$ soit une base de E.

d) Ecrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_e$.

3. Montrer que deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $n-1$ sont semblables.

Partie 3 : Réduction d'un endomorphisme particulier

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $\left(\mathrm{id}_E, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ est libre.
On considère $\chi_f(X) = \prod\limits_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$ le polynôme caractéristique χ_f de f, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de f de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_p$.
Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on pose $F_k = \operatorname{Ker}\left((f - \lambda_k \mathrm{id}_E)^{m_k}\right)$

1. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, le sous-espace vectoriel F_k est stable par f.

2. Montrer que $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$.

3. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on considère l'endomorphisme φ_k de F_k tel que, pour tout $x \in F_k$, $\varphi_k(x) = f(x) - \lambda_k x$.

a) Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k.

b) Déterminer, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, la dimension de F_k.

c) Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, l'indice de nilpotence de φ_k est m_k.

4. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, tel que chaque bloc est une matrice de $\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$ de la forme $A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$.

Partie 4: Cycles

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre un entier naturel non nul p s'il existe x_0 de E vérifiant les conditions :

- $f^p(x_0) = x_0$.
- $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\right)$ est une famille génératrice de E dont les éléments sont distincts deux a deux.

On dit alors que la famille $\left(x_0, f(x_0) \ldots, f^{p-1}(x_0)\right)$ est un $p-$ cycle de f.

1. Soit $\left(x_0, f(x_0), \ldots., f^{p-1}(x_0)\right)$ un $p-$ cycle de f.

a) Montrer que $f^p = \mathrm{id}_E$.

b) Montrer que l'ensemble $F_{x_0} = \left\{k \in \mathbb{N}^* \mid \left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0)\right) \text{ est une famille libre}\right\}$ admet un maximum noté γ.

c) **i)** Montrer que pour tout entier k tel que $k \geq \gamma$, ,$f^k(x_0) \in \mathrm{Vect}\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{\gamma-1}(x_0)\right)$.

ii) Montrer que $\gamma = n$.

iii) Déterminer le nombre des valeurs propres distinctes de f.

2. Soit $\mathcal{B}_{x_0} = \left(x_0, f(x_0) \ldots\ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ un n-cycle de f.

a) Justifier que $\mathcal{B}_{x_0}$ est une base de E.

b) Déterminer la matrice G de l'endomorphisme f dans la base B_{x_0}.

c) On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $U_k = \begin{pmatrix} \overline{\omega}^k \\ \overline{\omega}^{2k} \\ \vdots \\ \overline{\omega}^{nk} \end{pmatrix}$, où $\overline{\omega}$ désigne le conjugué de ω.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, vérifier que U_k est un vecteur propre de G associé à une valeur propre α_k à déterminer.

3. Soit $M = (m_{k,l})_{1\leq k,l\leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que $m_{k,l} = \overline{\omega}^{kl}$. On note $\overline{M} = (\overline{m}_{k,l})_{1\leq k,l\leq n}$, où $\overline{m}_{k,l}$ est le conjugué de $m_{k,l}$.

a) Calculer $M\,\overline{M}$.

b) En déduire que $M \in GL_n(C)$ et calculer M^{-1}

4. Soit $(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $H = \begin{pmatrix} b_0 & b_{n-1} & \dots & b_2 & b_1 \\ b_1 & \ddots & \ddots & & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2} & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que H est diagonalisable.

b) Déterminer les valeurs propres de H et une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de H.

Partie 5 : La dimension maximale d'un sous-espace vectoriel des matrices nilpotentes

On note $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures dont la diagonale est composée seulement par des 0 . On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer la dimension de $\mathcal{T}$.

2. Montrer que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice appartenant à $\mathcal{T}$.

3. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}$.

4. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$ telle que $\dim(F) > \frac{n(n-1)}{2}$. Montrer que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) > 0$.

5. En déduire la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$.

- FIN DE L'ÉPREUVE -