$f \in C([a,b],\mathbb{K})$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b t^n f(t)\,dt = 0$

1) M.q :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \int_a^b P(t) f(t)\,dt = 0$$

S! 2) En déduire que $\boxed{f = 0}$

Posons :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{s} a_i X^i$$

$$\int_a^b P(t) f(t)\,dt = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{s} a_i t^i f(t)\right) dt$$

$$= \sum_{i=0}^{s} a_i \cdot \Big(\underbrace{\int_a^b t^i f(t)\,dt}_{=0}\Big)$$

$$= 0$$

$f \in C([a,b], \mathbb{K})$

$\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b t^n f(t)\,dt = 0$

1) M.q. : $\forall P \in \mathbb{K}[X], \int_a^b P(t) f(t)\,dt = 0$

2) En déduire que $\boxed{f = 0}$

Thm de Weierstrass

$\forall f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$.

Il existe une suite de fonctions __polynomiales__

$(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$(P_n)_n$ CU vers f sur $[a,b]$

__Càd__ : $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = f$ pour $\| \cdot \|_\infty$.

__Rappel__ : (D dense de E) $\Longleftrightarrow$ ($\forall x \in E$, $\exists (d_n)_n \subset D$, $\lim\limits_n d_n = x$)

__Weirstrass dit que__ : « __l'ens. des fct polyn__ $\boxed{\text{dense}}$ dans $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ »

2) Montrons que $f = 0$ sur $[a,b]$

$\star$ Il suffit de montrer que $\int_a^b f^2(t)\,dt = 0$ — Ce qu'on veut prouver

$\star$ $\exists (P_n)_{n\geq 0}$ tq $(P_n)_n$ CU vers f sur $[a,b]$ (d'après Weierstrass)

et les P_n sont des fonctions polynomiales

$\star$ 1°) $\Longrightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b P_n(t) f(t)\,dt = 0\right)$

$$\Rightarrow \lim_n \left(\int_a^b P_n(t) f(t)\,dt\right) = 0$$

$P_n(t) f(t) \xrightarrow{CU} f^2$ (à justifier)

$$\Rightarrow \int_a^b f^2(t)\,dt \sim$$