

Correction

d'après Mines sup 2000 (spécialité)

Partie I

1. La fonction $x \mapsto \cos x$ est continue et par développement :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y.$$

La fonction $x \mapsto \operatorname{ch} x$ est continue et :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, 2 \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x-y}}{2} = \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} + \frac{e^{x-y} + e^{y-x}}{2}$$

ce qui donne : $2 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)$.

Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \operatorname{ch} x$ appartiennent à \mathcal{E} .

2. f_α est continue par opérations sur les fonctions continues.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f_\alpha(x+y) + f_\alpha(x-y) = f(\alpha x + \alpha y) + f(\alpha x - \alpha y) = 2f(\alpha x)f(\alpha y) = 2f_\alpha(x)f_\alpha(y).$$

La fonction f_α appartient à \mathcal{E} .

- 3.a Pour $x = y = 0$, on obtient $2f(0) = 2f(0)^2$ donc $f(0)(1 - f(0)) = 0$ puis $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

- 3.b Supposons $f(0) = 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y = 0$, on obtient $2f(x) = 2f(x)f(0) = 0$ donc $f = 0$.

- 3.c Supposons $f(0) = 1$. \mathbb{R} est symétrique par rapport à 0.

Pour $x = 0$ et $y \in \mathbb{R}$, $f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y) = 2f(y)$ donc $f(-y) = f(y)$ et f est paire.

Partie II

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On a $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

En dérivant la relation par rapport à y , on obtient $f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y)$.

En dérivant à nouveau par rapport à y , on obtient : $f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$.

2. Posons $\lambda = f''(0)$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y = 0$, la relation ci-dessus donne $2f''(x) = 2f''(0)f(x)$ i.e. $f''(x) = \lambda f(x)$.

3. $y'' + \mu y = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2 + \mu = 0$.

Si $\mu > 0$ alors l'équation caractéristique possède deux racines complexes : $i\sqrt{-\mu}$ et $-i\sqrt{-\mu}$.

La solution générale de l'équation différentielle est $y(x) = C_1 e^{\sqrt{\mu}x} + C_2 e^{-\sqrt{\mu}x}$.

Si $\mu < 0$ alors l'équation caractéristique possède deux racines réelles : $\sqrt{\mu}$ et $-\sqrt{\mu}$.

La solution générale de l'équation différentielle est $y(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\mu}x) + C_2 \sin(\sqrt{-\mu}x)$.

Si $\mu = 0$ alors l'équation caractéristique possède une racine double : 0.

La solution générale de l'équation différentielle est $y(x) = C_1 x + C_2$.

4. Soit f un élément de \mathcal{E} deux fois dérivable.

f peut être la fonction nulle.

Si f n'est pas la fonction nulle alors f est une fonction paire, vérifiant l'équation $f(0) = 1$ et solution d'une équation différentielle du type $y'' + \mu y = 0$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.

Dans le cas $\mu > 0$, on obtient $f(x) = C_1 e^{\sqrt{\mu}x} + C_2 e^{-\sqrt{\mu}x}$ avec $C_1 = C_2$ (par parité) et $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ (par la relation $f(0) = 1$). Par suite $f(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{\mu}x)$.

Inversement, I.1 et I.2 (avec $\alpha = \sqrt{\mu}$) assure qu'une telle fonction est solution.

Dans le cas $\mu < 0$, on obtient $f(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\mu}x) + C_2 \sin(\sqrt{-\mu}x)$ avec $C_2 = 0$ (par parité) et $C_1 = 1$

(par la relation $f(0) = 1$). Par suite $f(x) = \cos(\sqrt{-\mu}x)$.

Inversement, I.1 et I.2 (avec $\alpha = \sqrt{-\mu}$) assure qu'une telle fonction est solution.

Dans le cas $\mu = 0$, on obtient $f(x) = C_1x + C_2$ avec $C_1 = 0$ (par parité) et $C_2 = 1$ (par $f(0) = 1$). Par suite $f(x) = 1$. Inversement cette fonction est solution.

Résumons, les fonctions deux fois dérivables solutions sont :

$f : x \mapsto 0$, $f : x \mapsto 1$, $f : x \mapsto \cos(\alpha x)$ (avec $\alpha > 0$) et $f : x \mapsto \text{ch}(\alpha x)$ (avec $\alpha > 0$).

Partie III

1. I.3.b implique par contraposition $f(0) \neq 0$, I.3.a donne alors $f(0) = 1$ et I.3.c donne f paire. Puisque f s'annule au moins une fois, que ce n'est pas en 0 et qu'elle est paire, on peut assurer que f s'annule au moins une fois sur \mathbb{R}^{+*} .
- 2.a E est une partie de \mathbb{R} , non vide (via III.1) et minorée par 0. Elle admet donc une borne inférieure a .
- 2.b (1) Par l'absurde, supposons $f(a) \neq 0$.
Par continuité en a , il existe un voisinage de a , de la forme $[a - \alpha, a + \alpha]$ (avec $\alpha > 0$) sur lequel f ne s'annule pas. Par suite E étant minorée par a , l'est aussi par $a + \alpha$. Or a est le plus grand des minorants de E . Absurde.
(2) En exploitant la réalisation séquentielle d'une borne inférieure.
Il existe $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \rightarrow a$. Puisque f est continue $f(x_n) \rightarrow f(a)$.
Or $x_n \in E$ donc $f(x_n) = 0$ puis par unicité de la limite $f(a) = 0$.
 $a = \inf E$, $E \subset \mathbb{R}^{+*}$ donc $a \in \mathbb{R}^+$ or $f(a) = 0$ et $f(0) = 1$ donc $a > 0$.
- 2.c De part la définition de a , on a $\forall x \in]0, a[$, $f(x) \neq 0$. De plus, on sait $f(0) = 1$.
Si par l'absurde, $\exists y \in]0, a[$ tel que $f(y) \leq 0$ alors en appliquant le TVI entre 0 et y , on peut affirmer que f s'annule entre 0 et y . Cela contredit la propriété : $\forall x \in]0, a[$, $f(x) \neq 0$. Absurde.
- 3.a Exploitions la relation $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ avec $x = y = \frac{a}{2^{q+1}}$.
On obtient $f\left(2\frac{a}{2^{q+1}}\right) + 1 = 2f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)$ puis la relation voulue.
- 3.b Par récurrence que $q \in \mathbb{N}$.
Pour $q = 0$: $f\left(\frac{a}{2^0}\right) = f(a) = 0 = g(a)$.
Supposons la propriété établie au rang $q \in \mathbb{N}$.
On a $f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$ et $f\left(\frac{a}{2^q}\right) \stackrel{HR}{=} g\left(\frac{a}{2^q}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2^{q+1}}\right)$ donc
 $\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2^{q+1}} + 1\right) = \cos^2\frac{\pi}{2^{q+2}}$ en vertu de $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$.
Sachant $f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) > 0$ et $\cos\frac{\pi}{2^{q+2}} > 0$ on a $f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) = \cos\frac{\pi}{2^{q+2}} = g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)$.
Récurrence établie.
- 3.c Par récurrence double sur $p \in \mathbb{N}$, montrons que $\forall q \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{pa}{2^q}\right) = g\left(\frac{pa}{2^q}\right)$.
Pour $p = 0$, $f(0) = 1 = g(0)$.
Pour $p = 1$, $\forall q \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$ en vertu de III.3b
Supposons la propriété vraie aux rangs p et $p-1$ avec $p \geq 1$.
En exploitant la relation $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$

avec $x = \frac{pa}{2^q}$ et $y = \frac{a}{2^q}$ on obtient : $f\left(\frac{(p+1)a}{2^q}\right) + f\left(\frac{(p-1)a}{2^q}\right) = 2f\left(\frac{pa}{2^q}\right)f\left(\frac{a}{2^q}\right)$.

Par HR : $f\left(\frac{(p+1)a}{2^q}\right) = 2f\left(\frac{pa}{2^q}\right)f\left(\frac{a}{2^q}\right) - f\left(\frac{(p-1)a}{2^q}\right) = 2g\left(\frac{pa}{2^q}\right)g\left(\frac{a}{2^q}\right) - g\left(\frac{(p-1)a}{2^q}\right)$.

Or $2g\left(\frac{pa}{2^q}\right)g\left(\frac{a}{2^q}\right) - g\left(\frac{(p-1)a}{2^q}\right) = 2\cos\frac{p\pi}{2^{q+1}}\cos\frac{\pi}{2^{q+1}} - \cos\frac{(p-1)\pi}{2^{q+1}} = \cos\frac{(p+1)\pi}{2^{q+1}} = g\left(\frac{(p+1)a}{2^{q+1}}\right)$

via la formule $2\cos x \cos y - \cos(x-y) = \cos(x+y)$.

Ainsi $f\left(\frac{(p+1)a}{2^q}\right) = g\left(\frac{(p+1)a}{2^q}\right)$.

Réurrence (double) établie.

3.d Par parité de f et g , on peut étendre la propriété à $p \in \mathbb{Z}$.

4.a Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $u_n = \frac{E(2^n x/a)a}{2^n}$. On a $u_n \in D_a$ et puisque $\frac{2^n x}{a} - 1 \leq E\left(\frac{2^n x}{a}\right) \leq \frac{2^n x}{a}$ on a aussi

$x - \frac{a}{2^n} \leq u_n \leq x$. Par le théorème des gendarmes : $u_n \rightarrow x$.

4.b Soit $x \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite d'éléments de D_a telle que $u_n \rightarrow x$.

Puisque f et g sont continues et que $u_n \rightarrow x$ on a $f(u_n) \rightarrow f(x)$ et $g(u_n) \rightarrow g(x)$.

Or, par III.3d, on a $f(u_n) = g(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc à la limite $f(x) = g(x)$.

Finalement $f = g$.