Rappel : Toute matr de passage est inversible

$(PDP^{-1})^2 =$

$PDP^{-1} \cdot PDP^{-1}$

$P\,D\,I\,D\,P^{-1}$

$P\,D \cdot D\,P^{-1} = P\,D^2\,P^{-1}$

4) i) Calculer P^{-1}

ii) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

iii) Considérons les suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ *et* $(z_n)_n$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 &= 1 \\ y_0 &= -1 \\ z_0 &= 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+1} &= 4x_n - 2y_n - 2z_n \\ y_{n+1} &= x_n - z_n \\ z_{n+1} &= 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

Détérminer le terme général de chacune des suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ *et* $(z_n)_n$.

$D = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}$; $D^n = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 2^n \end{pmatrix}$

30 s

$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

$A^n = (P\,D\,P^{-1})^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$

$\forall P, D$

$\forall n \in \mathbb{N}$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

Connue

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \\ 0 & \end{pmatrix}$

$A^0 = I$

4) i) $P^{-1} = ?$

Ex/ 1.9

$\forall n \in \mathbb{N}, \ (PDP^{-1})^n = P.D^n.P^{-1}$

Sol/ Par récurr sur $n \in \mathbb{N}$

1) Initialisation : Pour $n=0$

On a $(PDP^{-1})^0 = I$ égalité

Et on a $P D^0 P^{-1} = P I P^{-1} = I$

2) Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supp que $(PDP^{-1})^n = P D^n P^{-1}$.

M.que $(PDP^{-1})^{n+1} = P D^{n+1} P^{-1}$

$=$

Tha :

$$(PDP^{-1})^{n+1} = (PDP^{-1})^{n} \cdot (PDP^{-1})$$

$$\overset{HR}{=} PD^{n}P^{-1} \cdot PDP^{-1}$$

$$= PD^{n}\underbrace{P^{-1} \cdot P}_{I}DP^{-1}$$

$$= PD^{n} \cdot DP^{-1}$$

$$\overset{\Delta}{=} P \cdot D^{n+1} \cdot P^{-1}$$

$\square$

iii) Considérons les suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ *et* $(z_n)_n$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -1 \\ z_0 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2y_n - 2z_n \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

Détérminer le terme général de chacune des suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ *et* $(z_n)_n$.

(Très classique son idée)

Posons $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = A \cdot X_n$

$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_n - 2y_n - 2z_n \\ x_n - z_n \\ 3x_n - 2y_n - z_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A X_n$

$X_n = A^n \cdot X_0$

Il ressemble à u_{n+}