Extrait du CNC Marocain pour 1ère Année

Année 2024

Filière MP

Exercice

On désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 3. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ a base canonique de $\mathbb{R}^3$ et par I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices suivantes:

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. **a)** Vérifier que $PQ = 4\mathrm{I}_3$.

b) En déduire que P est une matrice inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1}.

2. On considère les vecteurs suivants :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $Au = u$, $Av = 2v$ et $Aw = 2w$. Question modifiée pour s'adapter à la lère année

b) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à préciser telle que $A = PDP^{-1}$.

3. **a)** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n, A^n = PD^nP^{-1}$.

b) Déterminer, pour tout entier naturel n, D^n en fonction de n.

c) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de A^n en fonction de n sous forme d'un tableau.

Problème

Dans tout le problème $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on désigne par E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n, $n \geq 1$ et par $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de E. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}, GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $f^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$ où id_E désigne l'application identité de E.

On dit que f est un endomorphisme nilpotent s'il existe un entier naturel non nul p tel que $f^p = 0$, le plus petit entier naturel non nul p vérifiant cette propriété est appelé indice de nilpotence de f.

Partie 1: Noyaux itérés

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on note pour tout entier naturel $k, \mathcal{N}_k = \operatorname{Ker}\left(f^k\right)$ et $\mathcal{I}_k = \operatorname{Im}\left(f^k\right)$.

1. Montrer que la suite $\left(\mathcal{N}_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $\left(\mathcal{I}_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.

2. En déduire que $\left(\dim \mathcal{N}_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.

3. Justifier l'existence d'un plus petit entier naturel q tel que $\mathcal{N}_q = \mathcal{N}_{q+1}$.

4. Montrer que $\mathcal{I}_q = \mathcal{I}_{q+1}$.

5. Montrer que $\mathcal{N}_q \oplus \mathcal{I}_q = E$,

6. On considère pour tout entier naturel k, φ_k la restriction de f a $\mathcal{I}_k$.

- **a)** Montrer que $\dim \mathcal{I}_k - \dim \mathcal{I}_{k+1} = \dim\left(\operatorname{Ker}(f\ ) \cap \mathcal{I}_k\right)$.
- **b)** En déduire que la suite $\left(\dim \mathcal{N}_{k+1} - \dim \mathcal{N}_k\ \right)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Partie 2 : Les endomorphismes nilpotents de rang $n-1$

Soit U une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de rang $n-1$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé a U. $(E = \mathbb{C}^n\ )$

1. Soient r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $\operatorname{Im}\left(u^r\right)$.

- **a)** Vérifier que $\operatorname{Im}(v) = \operatorname{Im}\left(u^{s+r}\right)$.
- **b)** Montrer que $\operatorname{Ker}(v) \subset \operatorname{Ker}\left(u^s\right)$.
- **c)** Montrer que $\dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^{r+s}\right)\right) \leq \dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^r\right)\right) + \dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^s\right)\right)$.
- **d)** En déduire que pour tout entier naturel $i, \dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^i\right)\right) \leq i$.

2. On suppose de plus que $U^n = 0$.

- **a)** Montrer que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n, \dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^i\right)\right) = i$.
- **b)** Montrer que l'indice de nilpotence de u est égal à n.
- **c)** En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que $\mathcal{B}_e = \left(e, u(e), \ldots, u^{n-1}(e)\right)$ soit une base de E.
- **d)** Ecrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_e$.

3. Montrer que deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $n-1$ sont semblables.

Partie 3: Cycles

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre un entier naturel non nul p s'il existe x_0 de E vérifiant les conditions :

- $f^p\left(x_0\right) = x_0$.
- $\left(x_0, f\left(x_0\right), \ldots, f^{p-1}\left(x_0\right)\right)$ est une famille génératrice de E dont les éléments sont distincts deux a deux.

On dit alors que la famille $\left(x_0, f\left(x_0\right) \ldots, f^{p-1}\left(x_0\right)\right)$ est un $p-$ cycle de f.

1. Soit $\left(x_0, f\left(x_0\right), \ldots., f^{p-1}\left(x_0\right)\right)$ un $p-$ cycle de f.

a) Montrer que $f^p = \mathrm{id}_E$.

b) Montrer que l'ensemble $F_{x_0} = \left\{k \in \mathbb{N}^* \mid \left(x_0, f\left(x_0\right), \ldots, f^{k-1}\left(x_0\right)\right) \text{ est une famille libre}\right\}$ admet un maximum noté γ.

c) **i)** Montrer que pour tout entier k tel que $k \geq \gamma$, ,$f^k\left(x_0\right) \in \operatorname{Vect}\left(x_0, f\left(x_0\right), \ldots, f^{\gamma-1}\left(x_0\right)\right)$.

ii) Montrer que $\gamma = n$.

2. Soit $\mathcal{B}_{x_0} = \left(x_0, f\left(x_0\right) \ldots \ldots, f^{n-1}\left(x_0\right)\right)$ un n-cycle de f.

a) Justifier que $\mathcal{B}_{x_0}$ est une base de E.

b) Déterminer la matrice G de l'endomorphisme f dans la base B_{x_0}.

3. Soit $M = (m_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que $m_{k,l} = \overline{\omega}^{kl}$. On note $\overline{M} = (\overline{m}_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n}$, où $\overline{m}_{k,l}$ est le conjugué de $m_{k,l}$.

a) Calculer $M\,\overline{M}$.

b) En déduire que $M \in GL_n(C)$ et calculer M^{-1}