Systèmes Linéaires. Rang et Inverse de Matrices

Exercice 1

1) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'apllication linéaire canoniquement associée.

   i) Calculer rg(M).

   ii) Chercher ker(f) et en préciser une base.

   iii) Déterminer Im(f) et en préciser une base.

2) Répondre aux questions de 1) dans chacun des cas suivants :

   i) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

   ii) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

   iii) $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

   iv) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Calculer rg(f) dans chacun des cas suivants, pui dire si f est surjective, injective, bijective. (Justifier vos réponses)

1) $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-x+y+z, x-y+z, x+y-z) \end{array} \right.$

2) $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P'(2)) \end{array} \right.$

3) $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, 2x-y, x+y) \end{array} \right.$

4) $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-x+y+z, x-y+z) \end{array} \right.$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, calculer rg(B), le rang de la famille B et dire si B est une base de E.

1) $E=\mathbb{R}^3$. B$=(u,v,w)$ où $\begin{cases} u &= (1,1,2) \\ v &= (1,2,1) \\ w &= (2,1,1) \end{cases}$

2) $E=\mathbb{R}_2[X]$. B$=(P_1,P_2,P_3)$ où $\begin{cases} P_1 &= (X+1)^2 \\ P_2 &= (X-1)^2 \\ P_3 &= 1+X+X^2 \end{cases}$

Exercice 4

Posons $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Calculer $\mathrm{rg}(A_\alpha)$.

2) Calculer A_α^{-1} quand A_α est inversible.

Exercice 5

Considérons le système homogène suivant :

$$(H) : \begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5 &= 0 \\ x_2+x_3-2x_4+2x_5 &= 0 \\ 2x_1+x_2-5x_3-4x_5 &= 0 \end{cases}$$

Notons S_H l'espace des solutions de (H).

1) Calculer $\dim(S_H)$

2) Chercher une base de S_H.

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, calculer l'inverse A^{-1} sous réseve d'existence :

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 7

Résoudre les systèmes homogènes suivants, et préciser pour chacun une base de l'espace des solutions.

1) $(H_1) : \begin{cases} 2x+4y-4z &= 0 \\ 3x+9y-6z &= 0 \\ 4x+17y-11y &= 0 \end{cases}$

2) $(H_2) : \begin{cases} -x+6y-z &= 0 \\ 2x-5y+3z &= 0 \end{cases}$

3) $(H_3) : \begin{cases} x+y-z+t & = & 0 \\ 2x-y+3z-t & = & 0 \end{cases}$

Exercice 8

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ Déterminer ker(A-I_3) et ker(A+I_3).
Préciser pour chacun une base.

2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
Déterminer ker(B-I_3) et en préciser une base.

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
Déterminer ker(C-I_3) et en préciser une base.