que $(1-a)\times\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \lim_{n\to+\infty} S_n \text{ ; où } S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k .$$

$\lim_n x_n = l$

$\Downarrow$ si f continue en l

$\lim_n f(x_n) = f(l)$

$\Updownarrow$ càd

$\lim_n f(x_n) = f\left(\lim_n x_n\right)$

si f continue

$f : x \mapsto (1-a).x$ est continue sur $\mathcal{A}$; en effet :

→ f linéaire,
$\mathcal{A}$ de dim finie
$\Rightarrow f$ continue sur $\mathcal{A}$

(je vous chuchote
I whisper
sans la dimension finie)

f linéaire, pour que f continue :
$\|f(x)\| = \|(1-a)\times x\| \leq \|1-a\|\cdot\|x\|$
↳ c'est $C>0$

$f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$
$x \mapsto (1-a)\cdot x = f(x)$

$$(1-a)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\right) = (1-a)\cdot\left(\lim_{n\to+\infty} S_n\right)$$
$$= f\left(\lim_n S_n\right)$$
$$\overset{*}{=} \lim_n f(S_n) \quad \left(\begin{array}{c} f \text{ continue} \\ \text{voir} \\ \text{ci-dessous} \end{array}\right)$$
$$= \lim_n \left((1-a)S_n\right)$$
$$= \lim_n \left((1-a)\cdot\sum_{k=0}^{n} a^k\right)$$
$$= \lim_n \left(\sum_{k=0}^{n} (1-a)\cdot a^k\right)$$
$$= \lim_n \left(\sum_{k=0}^{n} \left(a^k - a^{k+1}\right)\right) \underset{\text{télescopique}}{=} \lim_n \left(1 - a^{n+1}\right)$$
$$= 1$$

CQFD

Q) Mq

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ ACV

i) M

Rép Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

Mq $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ ACV

(D'Alembert!)

$U_n = \left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|^n}{n!} > 0$

$\lim_n \frac{U_{n+1}}{U_n} = \cdots = 0 < 1$

Rappel

< 1 CV

$= 1$ (Rien à conclure)

> 1 DiV

$\Rightarrow \sum U_n$ CV

$\Rightarrow \sum \left|\frac{x^n}{n!}\right|$ CV

$\Rightarrow \sum \frac{x^n}{n!}$ ACV

2) Rq

$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ ACV

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

à retenir