Exercice

On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $[0,\pi]$ par :

$$\forall x \in [0,\pi], \qquad f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}\right).$$

1. Calculer la dérivée de f. Vérifier que $f'(x)$ est du signe de $\cos x - \frac{1}{2}$.

2. En déduire les variations de f et tracer sa courbe représentative.

3. Vérifier que la fonction g est bien définie en tout point de $[0,\pi]$.

4. Pour $x \in [0,\pi]$, simplifier les expressions $\cos\big(g(x)\big)$ et $\sin\big(g(x)\big)$.

5. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0,\pi[$. La fonction g est-elle dérivable sur $[0,\pi]$?

6. Vérifier que, pour tout réel $x \in [0,\pi]$, on a $g\big(g(x)\big) = x$. Qu'en déduit-on concernant la courbe Γ représentant g ?

7. Construire la courbe Γ.

8. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $[0,\frac{\pi}{3}]$.
   a) Montrer qu'il existe un unique réel z appartenant à $[\frac{\pi}{3},\pi]$ tel que $f(z)=f(x)$.
   b) Montrer que $z = g(x)$.