Probabilités

Construction d'une probabilité

Exercice 1 [03821] [correction]
Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ telle que la probabilité de l'événement $\{k\}$ soit proportionnelle à k.

Exercice 2 [03822] [correction]
Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ telle que la probabilité de l'événement $\{1, 2, \dots, k\}$ soit proportionnelle à k^2.

Exercice 3 [03823] [correction]
A quelle(s) condition(s) sur $x, y \in \mathbb{R}$ existe-t-il une probabilité sur $\Omega = \{a, b, c\}$ vérifiant

$$P(\{a, b\}) = x \text{ et } P(\{b, c\}) = y\,?$$

Exercice 4 [03824] [correction]
Soient A, B deux parties d'un ensemble Ω fini vérifiant

$$A \cap B \neq \emptyset,\ A \cap \bar{B} \neq \emptyset,\ \bar{A} \cap B \neq \emptyset \text{ et } \bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$$

A quelle condition sur $(a, b, c, d) \in \left]0, 1\right[^4$ existe-t-il une probabilité P sur Ω vérifiant

$$P(A \mid B) = a,\ P(A \mid \bar{B}) = b,\ P(B \mid A) = c \text{ et } P(B \mid \bar{A}) = d\,?$$

Exercice 5 [03829] [correction]
Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé.
Montrer

$$\max\{0, P(A) + P(B) - 1\} \leqslant P(A \cap B) \leqslant \min\{P(A), P(B)\}$$

Calcul de probabilité évènementielle

Exercice 6 [03957] [correction]
On dispose r boules à l'intérieur de n urnes (avec $r \leqslant n$), chaque urne pouvant contenir plusieurs boules.
Les répartitions possibles sont équiprobables.
a) Déterminer la probabilité de l'évènement :

$$A : \text{« chaque urne contient au plus une boule »}$$

b) Déterminer la probabilité de l'évènement :

$$B : \text{« il existe une urne contenant au moins deux boules »}$$

Exercice 7 [03958] [correction]
a) Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un « six » ?
b) Même question avec deux dés pour obtenir un « double-six »

Probabilités conditionnelles

Exercice 8 [03361] [correction]
Soient A et B deux évènements avec $P(A) > 0$. Comparer les probabilités conditionnelles

$$P(A \cap B \mid A \cup B) \text{ et } P(A \cap B \mid A)$$

Exercice 9 [03826] [correction]
On considère N coffres. Avec une probabilité p un trésor à été placé dans l'un de ses coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable. On a ouvert $N - 1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

Exercice 10 [03828] [correction]
On se donne $N + 1$ urnes numérotées de 0 à N. L'urne de numéro k contient k boules blanches et $N - k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, chaque choix étant équiprobable. Dans l'urne choisie, on tire des boules avec remise.
a) Quelle est la probabilité que $(n + 1)$-ième boule tirées soit blanche sachant que les n précédentes l'étaient toutes ?
b) Que de vient cette probabilité lorsque $N \to +\infty$?

Exercice 11 [03831] [correction]
Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé.
On suppose $0 < P(B) < 1$. Etablir

$$P(A) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid \bar{B})P(\bar{B})$$

Exercice 12 [03841] [correction]
Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires.
On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.
a) Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure à l'intérieur du tirage ?
b) Sachant qu'une boule noire figure dans le tirage. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire ?

Exercice 13 [03954] [correction]
Une famille possède deux enfants.
a) Quelle est la probabilité que les deux soient des garçons ?
b)Quelle est cette probabilité sachant que l'aîné est un garçon ?
c) On sait que l'un des deux enfants est un garçon, quelle est la probabilité que le deuxième le soit aussi ?

Exercice 14 [03955] [correction]
Cinq cartes d'un jeu de cinquante deux cartes sont servies à un joueur de Poker.
a) Quelle est la probabilité que celle-ci comporte exactement une paire d'As ?
b) Même question sachant que le jeu distribué comporte au moins un As ?

Formule des probabilités totales

Exercice 15 [03842] [correction]
Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires.
On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.
Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire ?

Exercice 16 [02417] [correction]
Une urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges. On tire de celle-ci une boule, on note sa couleur et on la remet accompagnée de d boules de la même couleur. On répète l'expérience à l'envi.
Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche lors du n-ième tirage.

Exercice 17 [03827] [correction]
Une succession d'individus $A_1, \dots, A_n$ se transmet une information binaire du type « oui »ou « non ».
Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçu avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transforme en son inverse avec la probabilité $1-p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.
Calculer la probabilité p_n pour que l'information reçu par A_n soit identique à celle émise par A_1.
On suppose $0 < p < 1$. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

Evénements indépendants

Exercice 18 [03948] [correction]
On lance à dé à six faces parfaitement équilibré. Justifier l'indépendance des évènements

$$A : \text{« on obtient le tirage 2, 4 ou 6 »et } B : \text{« on obtient le tirage 3 ou 6 »}$$

Exercice 19 [03951] [correction]
Soient A et B deux évènements indépendants. Les évènements A et $\bar{B}$ sont-ils aussi indépendants ?

Exercice 20 [03953] [correction]
Montrer qu'un évènement A est indépendant de tout autre évènement si, et seulement si, $P(A) = 0$ ou 1.

Exercice 21 [03830] [correction]
Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé.
On suppose $A \cap B = \emptyset$. A quelle condition les événements A et B sont-ils alors indépendants ?

Exercice 22 [03949] [correction]
Soient A, B, C trois évènements tels que A et B d'une part, A et C d'autre part, soient indépendants. Les événements A et $B \cup C$ sont-ils indépendants ? Même question avec A et $B \cap C$.

Exercice 23 [03950] [correction]
Soient A, B, C trois évènements tels que A et $B \cup C$ d'une part, A et $B \cap C$ d'autre part, soient indépendants. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 24 [03952] [correction]
Soient A, B, C trois évènements.
On suppose A indépendant de $B \cap C$, B indépendant de $A \cap C$ et C indépendant de $A \cap B$.
On suppose en outre A indépendant de $B \cup C$ et $P(A), P(B), P(C) > 0$.
Etablir que les évènements A, B, C sont mutuellement indépendants.

Exercice 25 [03819] [correction]
Soit n un entier naturel supérieur à 2. On définit une probabilité uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.
Pour un entier p divisant n, on introduit l'événement

$$A_p = \{1 \leqslant k \leqslant n / p \text{ divise } k\}$$

a) Calculer $P(A_p)$
b) Soient p et q deux diviseurs de n. On suppose que p et q sont premiers entre eux. Montrer que les événements A_p et A_q sont indépendants. Plus généralement montrer que si $p_1, \dots, p_r$ sont des diviseurs deux à deux premiers entre eux alors, les événements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ sont indépendants.
c) On note

$$B = \{1 \leqslant k \leqslant n / k \text{ et } n \text{ sont premiers entre eux}\}$$

Montrer

$$p(B) = \prod_{\substack{p \text{ diviseur} \\ \text{premier de } n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Formule de Bayes

Exercice 26 [03820] [correction]
Dans une population, une personne sur 10 000 souffre d'une pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99 % des malades mais aussi faussement positif chez 0,1 % des personnes non atteintes. Un individu passe ce test et obtient un résultat positif.
Quelle est sa probabilité d'être malade ? Qu'en conclure ?

Variable aléatoire

Exercice 27 [03369] [correction]
Une variable aléatoire réelle X suit une loi binomiale de taille n et de paramètre $p \in \left]0,1\right[$.
Pour quelle valeur de k, la probabilité

$$p_k = P(X = k)$$

est-elle maximale ?

Exercice 28 [03846] [correction]
Soit X une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p avec $p \in \left]0,1\right[$. On note

$$b(k, n, p) = P(X = k)$$

a) Pour quelle valeur m de k, le coefficient $b(k, n, p)$ est-il maximal ?
b) Etudier la monotonie de la fonction $f : x \mapsto x^m (1 - x)^{n-m}$ sur $[0, 1]$.
c) Vérifier que si $m \in [np, (n + 1)p]$ alors

$$b\left(m, n, \frac{m}{n+1}\right) \leqslant b(m, n, p) \leqslant b\left(m, n, \frac{m}{n}\right)$$

d) Proposer en encadrement analogue pour $m \in [(n + 1)p - 1, np]$.
e) On donne la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n \mathrm{e}^{-n}$$

Donner un équivalent simple de $b(m, n, p)$.

Indépendance de variables aléatoires

Exercice 29 [03817] [correction]
Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent des lois binomiales de tailles n et m et de même paramètre p. Peut-on identifier la loi suivie par la variable aléatoire $Z = X + Y$?

Exercice 30 [03818] [correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes.
Les variables aléatoires $X + Y$ et $X - Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 31 [03825] [correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires prenant pour valeurs $a_1, \dots, a_n$ avec

$$P(X = a_i) = P(Y = a_i) = p_i$$

On suppose que les variables X et Y sont indépendantes.
Montrer que

$$P(X \neq Y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(1 - p_i)$$

Inégalité de Markov

Exercice 32 [03832] [correction]
Soient X une variable aléatoire réelle et $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction strictement croissante.
Montrer que

$$\forall a \geqslant 0, P\left(|X| \geqslant a\right) \leqslant \frac{E\left(g(|X|)\right)}{g(a)}$$

Exercice 33 [03816] [correction]
Une variable aléatoire X suit une loi du binôme de paramètre p et de taille n.
Etablir pour $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}$$

Exercice 34 [03834] [correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de taille n et de paramètre p.
Montrer que pour tout $\lambda, \varepsilon > 0$

$$P\left(X - np > n\varepsilon\right) \leqslant E\left(\exp(\lambda(X - np - n\varepsilon)\right)$$

Espérance et variance

Exercice 35 [03833] [correction]
Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini. Etablir

$$E\left(X\right)^2 \leqslant E\left(X^2\right)$$

Exercice 36 [03835] [correction]
Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{0, 1, \dots, N\}$.
Etablir

$$E(X) = \sum_{n=0}^{N-1} P(X > n)$$

Exercice 37 [03836] [correction]
Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\{0, 1, \dots, n\}$ telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$P(X = k) = a\binom{n}{k}$$

Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 38 [03837] [correction]
Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire simultanément n boules dans celle-ci et on note X le nombre de boules rouges obtenues lors de ce tirage.
Quelle est la loi de X, son espérance, sa variance ?

Exercice 39 [03838] [correction]
Soit X une variable aléatoire binomiale de taille n et de paramètre $p \in \left]0, 1\right[$.
Calculer l'espérance de la variable

$$Y = \frac{1}{X + 1}$$

Exercice 40 [03839] [correction]
On se propose d'analyser le sang d'une population de N individus pour y déceler l'éventuelle présence d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec la probabilité p indépendamment des autres.
On dispose pour cela de deux protocoles :
Protocole 1 :
On analyse le sang de chacun des N individus.
Protocole 2 :
On regroupe les individus par groupe de n (on suppose N divisible par n). On rassemble la collecte de sang des individus d'un même groupe et on teste

l'échantillon. Si le résultat est positif, on analyse alors le sang de chacun des individus du groupe.
a) Préciser la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de groupes positifs.
b) Soit Y la variable aléatoire déterminant le nombre d'analyse effectuée dans le deuxième protocole.
Exprimer l'espérance de Y en fonction de n, N et p.
c) Comparer les deux protocoles pour les valeurs $N = 1000$, $n = 10$ et $p = 0,01$.

Exercice 41 [03840] [correction]
Dans une urne contenant n boules blanches et n boules rouges, on prélève successivement et sans remise les boules. On note X le nombre de tirages juste nécessaire à l'obtention de toutes les boules rouges.
a) Déterminer la loi de X.
b) Calculer son espérance et sa variance

Exercice 42 [03847] [correction]
Dans cet exercice, les variables aléatoires sont toutes supposées prendre leurs valeurs dans $\mathbb{Z}$.
On appelle fonction caractéristique d'une variable aléatoire X l'application $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\varphi_X(u) = E\left(\mathrm{e}^{iuX}\right)$$

a) Vérifier que φ_X est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Calculer $\varphi_X(0)$. Comment interpréter $\varphi_X'(0)$ et $\varphi_X''(0)$?
b) Calculer la fonction caractéristique d'une variable X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.
Même question avec une loi binomiale de paramètres n et p.
c) Soient X une variable aléatoire réelle et x_0 un entier. Vérifier

$$P(X = x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_X(u)\mathrm{e}^{-iux_0}\,\mathrm{d}u$$

En déduire

$$\varphi_X = \varphi_Y \Rightarrow X = Y$$

d) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Vérifier

$$\varphi_{X+Y} = \varphi_X\varphi_Y$$

e) Exploiter ce résultat pour retrouver la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Par hypothèse, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\{k\}) = \alpha k$. Or par additivité

$$\sum_{k=1}^{n} P(\{k\}) = P(\Omega) = 1$$

donc

$$\alpha = \frac{2}{n(n+1)}$$

Exercice 2 : [énoncé]
Si P est une probabilité solution alors, par hypothèse, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$P(\{1, 2, \ldots, k\}) = \alpha k^2$$

On a alors

$$P(\{k\}) = P(\{1, \ldots, k\}) - P(\{1, \ldots, k-1\}) = \alpha(2k-1)$$

Puisque par additivité

$$\sum_{k=1}^{n} P(\{k\}) = P(\Omega) = 1$$

on obtient

$$\alpha = 1/n^2$$

Inversement, la probabilité définie par

$$P(\{k\}) = \frac{2k-1}{n^2}$$

est bien solution.

Exercice 3 : [énoncé]
Une probabilité solution P sera entièrement déterminée par les valeurs de $p = P(\{a\})$, $q = P(\{b\})$ et $r = P(\{c\})$ sous les conditions

$$p, q, r \geqslant 0 \text{ et } p + q + r = 1$$

Nous aurons $P(\{a, b\}) = x$ et $P(\{b, c\}) = y$ si

$$p + q = x \text{ et } q + r = y$$

Le système

$$\begin{cases} p + q = x \\ q + r = y \\ p + q + r = 1 \end{cases}$$

a pour solution

$$p = 1 - y,\ q = x + y - 1 \text{ et } r = 1 - x$$

Cette solution vérifie $p, q, r \geqslant 0$ si, et seulement si,

$$x \leqslant 1,\ y \leqslant 1 \text{ et } x + y \geqslant 1$$

ce qui fournit les conditions nécessaires et suffisantes que doivent respecter x et y.

Exercice 4 : [énoncé]
Soit P une probabilité solution. Posons

$$x = P(A \cap B),\ y = P(A \cap \bar{B}),\ z = P(\bar{A} \cap B) \text{ et } t = P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

On a $x, y, z, t \geqslant 0$ et par additivité

$$x + y + z + t = P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Inversement, si x, y, z, t sont quatre réels positifs de somme égale à 1, on peut déterminer une probabilité P sur Ω vérifiant les conditions ci-dessus : il suffit d'introduire un élément de chacun des ensembles disjoints $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$, de poser la probabilité de l'événement élémentaire associé égale à x, y, z et t respectivement, puis les probabilités des autres événements élémentaires égaux à 0.
Le problème revient alors à déterminer sous quelle condition, il existe $x, y, z, t \geqslant 0$ de somme égale à 1 tels que

$$P(A \mid B) = a,\ P(A \mid \bar{B}) = b,\ P(B \mid A) = c \text{ et } P(B \mid \bar{A}) = d$$

Par additivité

$$P(A) = x + y \text{ et } P(B) = x + z$$

On a alors $P(A \mid B) = a$ si, et seulement si, $x = a(x + z)$.
De même, les autres conditions fournissent les équations

$$y = b(1 - (x + z)),\ x = c(x + y) \text{ et } z = d(1 - (x + y))$$

ce qui nous conduit à un système linéaire de quatre équations et trois inconnues

$$\begin{cases} (1-a)x - az = 0 \\ bx + y + bz = b \\ (1-c)x - cy = 0 \\ dx + dy + z = d \end{cases}$$

Les trois premières équations conduisent à la solution

$$x = \frac{abc}{a(1-c)+bc},\ y = \frac{ab(1-c)}{a(1-c)+bc} \text{ et } z = \frac{(1-a)bc}{a(1-c)+bc}$$

avec le dénominateur commun non nul car somme de quantités strictement positives.
La quatrième équation du système est alors vérifiée si, et seulement si,

$$ad(1-b)(1-c) = bc(1-a)(1-d)$$

La solution (x, y, z) alors obtenue vérifie $x, y, z \geqslant 0$ et $x + y + z \leqslant 1$ de sorte qu'on peut encore déterminer $t \geqslant 0$ tel que $x + y + z + t = 1$.
Finalement, il existe une probabilité telle que voulue si, et seulement si,

$$ad(1-b)(1-c) = bc(1-a)(1-d)$$

ce qui, en divisant par $abcd$, peut encore s'énoncer

$$\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right) = \left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{d}\right)$$

Exercice 5 : [énoncé]
On a $A \cap B \subset A$ donc $P(A \cap B) \leqslant P(A)$ et de même $P(A \cap B) \leqslant P(B)$ donc

$$P(A \cap B) \leqslant \min\{P(A), P(B)\}$$

Bien évidemment $P(A \cap B) \geqslant 0$. De plus $P(A \cup B) \leqslant 1$ or

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

donc

$$P(A \cap B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$$

puis

$$\max\{0, P(A) + P(B) - 1\} \leqslant P(A \cap B)$$

Exercice 6 : [énoncé]
En discernant les boules et les urnes, chaque tirage se comprend comme une application φ de $\{1, \ldots, r\}$ vers $\{1, \ldots, n\}$ associant à la boule d'indice i l'urne de numéro $\varphi(i)$ qui la contient.
Il y a n^r répartitions possible.
a) La probabilité cherchée correspond à celle de choisir une fonction φ injective soit

$$P(A) = \frac{n \times (n-1) \times \ldots (n-r+1)}{n^r}$$

b) La probabilité cherchée est complémentaire de la précédente

$$P(B) = 1 - P(A)$$

Exercice 7 : [énoncé]
a) La probabilité de ne pas obtenir de 6 lors de k lancers est $(5/6)^k$. Il s'agit donc ici de trouver le plus petit k pour lequel $(5/6)^k \leqslant 1/2$. On obtient $k = 4$.
b) On veut $(35/36)^k < 1/2$ et on obtient $k = 25$.

Exercice 8 : [énoncé]
Puisque $A \subset A \cup B$, on a $P(A \cup B) \geqslant P(A)$ puis

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} \leqslant \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

i.e.

$$P(A \cap B \mid A \cup B) \leqslant P(A \cap B \mid A)$$

Exercice 9 : [énoncé]
Considérons l'événement A : un trésor est placé dans l'un des coffres. Par hypothèse

$$P(A) = p$$

Considérons l'événement A_i : un trésor est placé dans le coffre d'indice i. Par hypothèse $P(A_i) = P(A_j)$ et puisque les événements A_i sont deux à deux incompatibles

$$P(A_i) = p/N$$

La question posée consiste à déterminer

$$P(A_N \mid \bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_{N-1})$$

On a

$$P(\bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_{N-1}) = 1 - P(A_1 \cup \ldots \cup A_{N-1}) = 1 - \frac{N-1}{N}p$$

et

$$P(A_N \cap \bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_{N-1}) = P(A_N) = \frac{p}{N}$$

donc

$$P(A_N \mid \bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_{N-1}) = \frac{p}{N-(N-1)p}$$

Exercice 10 : [énoncé]
a) Dans l'urne d'indice k, la probabilité de tirer une boule blanche vaut k/N.
Dans cette même urne, la probabilité de tirer une succession de n boules blanches vaut $(k/N)^n$.
Par la formule des probabilités totales, la probabilité qu'après choix d'une urne, nous tirions une succession de n boules blanches vaut

$$\pi_n = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n$$

Notons A_k l'événement, la boule tirée lors du k-ième tirage est une boule blanche
La probabilité conditionnée cherchée vaut

$$P(A_{n+1} \mid A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \frac{P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1})}{P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)}$$

avec

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \pi_n$$

donc

$$P(A_{n+1} \mid A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \frac{1}{N}\frac{\sum_{k=0}^{N} k^{n+1}}{\sum_{k=0}^{N} k^n}$$

b) Par somme de Riemann, on a

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

En adaptant quelque peu l'expression, on obtient

$$\pi_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{n+1}$$

donc

$$P(A_{n+1} \mid A_1 \cap \ldots \cap A_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{n+1}{n+2}$$

Exercice 11 : [énoncé]
On a

$$P(A) = P(A \cap (B \cup \bar{B})) = P\left((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})\right)$$

Les événements $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$ étant disjoints

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

Or $P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$ et $P(A \cap \bar{B}) = P(A \mid \bar{B})P(\bar{B})$.

Exercice 12 : [énoncé]
a) L'évènement contraire est que le tirage ne comporte que des boules blanches.
Par dénombrement, sa probabilité est

$$\binom{8}{3}/\binom{10}{3} = \frac{7}{15}$$

et la probabilité cherchée est

$$1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

b) Notons A l'événement, la première boule tirée est noire. En raisonnant comme au dessus

$$p(A) = \frac{9\times 8 + 9\times 8}{10\times 9\times 8} = \frac{1}{5}$$

L'événement B, au moins une boule tirée est noire a été mesurée ci-dessus et donc

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)}{p(B)} = \frac{3}{8}$$

Exercice 13 : [énoncé]
Ici $\Omega = \{(G,G),(G,F),(F,G),(F,F)\}$ avec équiprobabilité.
a) $P\left(G,G\right) = 1/4$.
b) $P\left((G,G) \mid \{(G,G),(G,F)\}\right) = 1/2$.
c) $P\left((G,G) \mid \{(G,G),(G,F),(F,G)\}\right) = 1/3$.

Exercice 14 : [énoncé]
a) Il y a $\binom{52}{5}$ distributions possibles équiprobables.
Il y a exactement $\binom{4}{2}$ paires d'As, $\binom{48}{3}$ façons de compléter ce jeu avec d'autres cartes que des As.
Au final, ce la donne la probabilité

$$\frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = \frac{2162}{54145} \simeq 0,04$$

b) La probabilité que le jeu distribué ne comporte pas d'As est

$$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}$$

et par complément, celle que le jeu distribué comporte au moins un As est

$$1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}$$

La probabilité conditionnelle cherchée est donc

$$\frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3}}{\binom{52}{5} - \binom{48}{5}} = \frac{1081}{9236} \simeq 0,12$$

Exercice 15 : [énoncé]
Notons A_i l'événement la boule obtenue lors du i-ème tirage est noire.
On introduit un système complet d'événements en considérant $B_1, \ldots, B_4$ égaux à

$$A_1 \cap A_2,\ A_1 \cap \bar{A}_2,\ \bar{A}_1 \cap A_2 \text{ et } \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$$

Par la formule des probabilités totales

$$p(A_3) = \sum_{k=1}^{4} p(A_3 \mid B_k)p(B_k)$$

Il ne reste plus qu'à évaluer...

$$p(A_3 \mid B_1) = 0$$

$$p(A_3 \mid B_2) = p(A_3 \mid B_3) = 1/8 \text{ avec} p(B_2) = p(B_3) = 8/10 \times 2/9$$

et

$$p(A_3 \mid B_4) = 2/8 \text{ avec } p(B_4) = 8/10 \times 7/9$$

Au final

$$p(A_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$$

C'est aussi la probabilité que la première boule tirée soit noire et par un argument de symétrie ce n'est pas si étonnant...

Exercice 16 : [énoncé]
Au premier tirage, la probabilité que la boule tirée soit blanche est

$$\frac{b}{b+r}$$

Au deuxième tirage, il faut tenir compte du résultat du précédent tirage. La probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche sachant que la première l'était est $(b+d)/(b+r+d)$. Si la première était rouge, on obtient $b/(b+r+d)$. Par la formule des probabilités totales, la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage est

$$\frac{b+d}{b+r+d} \times \frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+r+d} \times \frac{r}{b+r} = \frac{b}{b+r}$$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrons que la probabilité que la boule soit blanche lors du n-ième tirage vaut toujours $b/(b+r)$. Supposons cette propriété acquise jusqu'au rang n et étudions le résultat du $n+1$-ième tirage selon le nombre k de boules blanches tirées lors des précédents tirages. Par hypothèse de récurrence, le nombre k suit une loi binomiale de taille n et de paramètre $p = b/(b+r)$. La probabilité de tirer une boule blanche au $n+1$-ième tirage sachant que k boules blanches ont déjà été tirées vaut

$$\frac{b+dk}{b+r+nd}$$

Par la formule des probabilités totales, la probabilité d'obtenir une boule blanche au $n+1$-ième tirage vaut

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{b+dk}{b+r+nd}\left(\frac{b}{b+r}\right)^k\left(\frac{r}{b+r}\right)^{n-k}$$

On sépare la somme en deux et l'on exploite

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$$

pour obtenir

$$\frac{1}{b+r+nd}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b\left(\frac{b}{b+r}\right)^k\left(\frac{r}{b+r}\right)^{n-k}+\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\frac{bnd}{b+r}\left(\frac{b}{b+r}\right)^j\left(\frac{r}{b+r}\right)^{n-1-j}\right)$$

et l'on conclut à l'aide de la formule du binôme.

Exercice 17 : [énoncé]
On a $p_1=1$ et $p_2=p$.
Supposons connu p_n. Selon que A_n émet la même information que A_1 ou non, on a par la formule des probabilités totales

$$p_{n+1}=pp_n+(1-p)(1-p_n)$$

La suite (p_n) vérifie donc la relation de récurrence

$$p_{n+1}=(2p-1)p_n+1-p$$

Sachant la condition initiale $p_1=1$, cette suite arithmético-géométrique à pour terme général

$$p_n=\frac{1+(2p-1)^{n-1}}{2}$$

Si $p\in\,]0,1[$ alors $|2p-1|<1$ et donc $p_n\to 1/2$.

Exercice 18 : [énoncé]
$P(A)=1/2$, $P(B)=1/3$ et $P(A\cap B)=P(\{6\})=1/6$ donc

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

Les évènements A et B sont bien indépendants.

Exercice 19 : [énoncé]
Puisque A est la réunion disjointe de $A\cap B$ et $A\cap\bar{B}$, on a

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\bar{B})$$

et donc

$$P(A)=P(A)P(B)+P(A\cap\bar{B})$$

puis

$$P(A\cap\bar{B})=P(A)\left(1-P(B)\right)=P(A)P(\bar{B})$$

Les évènements A et $\bar{B}$ sont indépendants.

Exercice 20 : [énoncé]
Si A et indépendant de tout évènement alors A est indépendant de lui-même et donc

$$P(A)=P(A\cap A)=P(A)^2$$

On en déduit $P(A)=0$ ou 1.
Inversement, supposons $P(A)=0$. Pour tout évènement B, on a $A\cap B\subset A$ et donc $P(A\cap B)\leqslant P(A)=0$. Ainsi

$$P(A\cap B)=0=P(A)P(B)$$

Supposons maintenant $P(A)=1$. On a $P(\bar{A})=0$ et donc $\bar{A}$ est indépendant de tout évènement B. Par suite, A est aussi indépendant de tout évènement B.

Exercice 21 : [énoncé]
Si A et B sont indépendants alors

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

donc $P(A)=0$ ou $P(B)=0$.
La réciproque est immédiate.

Exercice 22 : [énoncé]
Considérons le tirage équilibré d'un dé à six faces et considérons

$$A = \{2, 4, 6\}, \; B = \{1, 2\} \text{ et } C = \{2, 3\}$$

On vérifie aisément

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ et } P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

Cependant

$$P(A \cap (B \cup C)) = 1/6 \neq P(A)P(B \cup C) = 1/4$$

et

$$P(A \cap (B \cap C)) = 1/6 \neq P(A)P(B \cap C) = 1/12$$

Ainsi, A et $B \cup C$ ne sont pas indépendants. Non plus, A et $B \cap C$.

Exercice 23 : [énoncé]
Considérons le tirage équilibré d'un dé à six faces et considérons

$$A = \{2, 4, 6\}, \; B = \{1, 2, 3\} \text{ et } C = \{1, 2, 4\}$$

On vérifie aisément

$$P(A \cap (B \cup C)) = 1/3 = P(A)P(B \cup C) \text{ et } P(A \cap (B \cap C)) = 1/6 = P(A)P(B \cap C)$$

Cependant

$$P(A \cap B) = 1/6 \neq P(A)P(B) = 1/4$$

Exercice 24 : [énoncé]
On a

$$P(A)P(B \cup C) = P(A \cap (B \cup C)) = P((A \cap B) \cup (A \cap C))$$

et donc

$$P(A)P(B \cup C) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

Or

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \cap C)$$

et

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

donc

$$P(A)P(B) + P(A)P(C) = P(A \cap B) + P(A \cap C)$$

Si $P(A)P(B) > P(A \cap B)$ alors $P(A)P(C) < P(A \cap C)$. Or B étant indépendant de $A \cap C$ et C de $A \cap B$, on obtient

$$P(B)P(A \cap C) = P(A \cap B \cap C) = P(C)P(A \cap B)$$

ce qui fournit

$$P(A)P(B)P(C) < P(A \cap B \cap C) < P(A)P(B)P(C)$$

C'est absurde. De même $P(A)P(B) < P(A \cap B)$ est absurde et donc

$$P(A)P(B) = P(A \cap B)$$

puis

$$P(A)P(C) = P(A \cap C)$$

Aussi

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

et enfin, puisque A et $B \cap C$ sont indépendants

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \cap C)$$

ce qui donne

$$P(B)P(C) = P(B \cap C)$$

Exercice 25 : [énoncé]
a) Les multiples de p dans $\{1, \ldots, n\}$ sont $p, 2p, \ldots, n$. Il y en n/p et donc

$$P(A_p) = \frac{1}{p}$$

b) Puisque p et q sont premiers entre eux, on a

$$pq \mid k \Leftrightarrow p \mid k \text{ et } q \mid k$$

On en déduit $A_p \cap A_q = A_{pq}$ et puisque

$$p(A_{pq}) = \frac{1}{pq} p(A_p)p(A_q)$$

on peut qualifier les évènements A_p et A_q d'indépendants.
On généralise par un calcul analogue à l'indépendance de $A_{p_1}, \ldots, A_{p_r}$ car

$$A_{p_{i_1}} \cap \ldots \cap A_{p_{i_k}} = A_{p_{i_1} \ldots p_{i_k}}$$

pour toute suite finie $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant r$.
c) Notons $p_1, \ldots, p_r$ les diviseurs premiers de n. Les entiers k et n sont premiers entre eux si, et seulement si, ils n'ont pas de diviseurs premiers en communs. Ainsi

$$B = \bar{A}_{p_1} \cap \ldots \cap \bar{A}_{p_r}$$

Les événements $\bar{A}_{p_1}, \ldots, \bar{A}_{p_r}$ étant indépendants (car leurs contraires le sont)

$$P(B) = \prod_{k=1}^{r} P(\bar{A}_{p_k}) = \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

Ce résultat est une façon « originale »d'obtenir la valeur de la fonction indicatrice d'Euler.

Exercice 26 : [énoncé]
Notons Ω la population, M le sous-ensemble constitué des individus malades et T celui constitué des individus rendant le test positif. On a

$$P(M) = 10^{-4},\ P(T \mid M) = 0,99 \text{ et } P(T \mid \bar{M}) = 10^{-3}$$

Par la formule des probabilités totales

$$P(T) = P(T \mid M)P(M) + P(T \mid \bar{M})P(\bar{M})$$

puis par la formule de Bayes

$$P(M \mid T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T \mid M)P(M)}{P(T)}$$

ce qui numériquement donne 9 %.
La personne n'a en fait qu'environ une chance sur 10 d'être malade alors que le test est positif ! Cela s'explique aisément car la population de malade est de 1/10 000 et celle des personnes saines faussement positives est de l'ordre de 1/1 000.

Exercice 27 : [énoncé]
Par définition d'une loi binomiale

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

et donc pour $k \geqslant 1$

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{n-k+1}{k} \frac{p}{1-p}$$

On en déduit

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} \geqslant 1 \Leftrightarrow k \leqslant (n+1)p$$

En notant k_0 la partie entière de $(n+1)p$. La suite $(p_k)_{0 \leqslant k \leqslant k_0}$ est croissante et la suite $(p_k)_{k_0 \leqslant k \leqslant n}$ est décroissante. Le maximum de p_k est donc atteint en $k = k_0$.

Exercice 28 : [énoncé]
Rappelons

$$b(k,n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

a) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\frac{b(k,n,p)}{b(k-1,n,p)} = \frac{n+1-k}{k} \frac{p}{1-p}$$

donc

$$\frac{b(k,n,p)}{b(k-1,n,p)} \geqslant 1 \Leftrightarrow k \leqslant (n+1)p$$

La suite finie $(b(k,n,p))_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est donc croissante jusqu'au plus grand entier m inférieur à $(n+1)p$ puis devient décroissante ensuite. On peut donc affirmer

$$m = \lfloor (n+1)p \rfloor$$

b) La fonction f est dérivable avec

$$f'(x) = (m - nx)x^{m-1}(1-x)^{n-m-1}$$

La fonction f est donc croissante sur $[0, m/n]$ et décroissante sur $[m/n, 1]$.
c) Si $m \in [np, (n+1)p]$ alors $m/(n+1) \leqslant p \leqslant m/n$ et puisque f est croissante sur $[0, m/n]$

$$f(m/(n+1)) \leqslant f(p) \leqslant f(m/n)$$

ce qui conduit à l'encadrement demandé.
d) Si $m \in [(n+1)p - 1, np]$ alors $m/n \leqslant p \leqslant (m+1)/(n+1)$ et par décroissance de f sur $[m/n, 1]$, on obtient

$$b\left(m, n, \frac{m+1}{n+1}\right) \leqslant b(m,n,p) \leqslant b\left(m, n, \frac{m}{n}\right)$$

e) Quand $n \to +\infty$, on a $m = \lfloor (n+1)p \rfloor \sim np \to +\infty$ et
$n - m \sim n(1-p) \to +\infty$ ce qui permet d'écrire simultanément

$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n \mathrm{e}^{-n}$, $m! \sim \sqrt{2\pi m} m^m \mathrm{e}^{-m}$ et $(n-m)! \sim \sqrt{2\pi(n-m)}(n-m)^{n-m}\mathrm{e}^{n-m}$

On en déduit après calcul

$$b\left(m, n, \frac{m}{n}\right) \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}$$

On obtient les mêmes équivalents pour

$$b\left(m, n, \frac{m}{n+1}\right) \text{ et } b\left(m, n, \frac{m+1}{n+1}\right)$$

et l'on peut donc conclure par encadrement

$$b\left(m, n, p\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}$$

Exercice 29 : [énoncé]
La variable Z prend ses valeurs dans $\{0, 1, \ldots, n+m\}$.
Soit $\ell \in \{0, 1, \ldots, n+m\}$. Par la formule des probabilités totales

$$P(Z = \ell) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)P(Z = \ell \mid X = k)$$

Si $k > \ell$ alors

$$P(Z = \ell \mid X = k) = 0$$

Si $k \leqslant \ell$ alors

$$P(Z = \ell \mid X = k) = P(Y = \ell - k \mid X = k) = P(Y = \ell - k)$$

car les variables aléatoires X et Y sont supposées indépendantes.
On en déduit

$$P(Z = \ell) = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n}{k} \binom{m}{\ell - k} p^\ell (1-p)^{n+m-\ell}$$

Or, en considérant le coefficient de X^ℓ dans le développement des deux membres de l'identité

$$(1+X)^{n+m} = (1+X)^n (1+X)^m$$

on obtient

$$\sum_{k=0}^{\ell} \binom{n}{k} \binom{m}{\ell - k} = \binom{n+m}{\ell}$$

et finalement

$$P(Z = \ell) = \binom{n+m}{\ell} p^\ell (1-p)^{n+m-\ell}$$

La variable aléatoire Z suit une loi binomiale de taille $n+m$ et de paramètre p.

Exercice 30 : [énoncé]
La réponse est négative en général.
Supposons que X et Y suivent des lois de Bernoulli de paramètre $1/2$.
On a

$$P(X + Y = 2) = P(X = 1)P(Y = 1) = 1/4$$

et

$$P(X - Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0) + P(X = 1)P(Y = 1) = 1/2$$

Or l'événement $X + Y = 2$ est inclus dans l'événement $X - Y = 0$ donc

$$P(X + Y = 2 \cap X - Y = 0) = P(X + Y = 2)$$

et l'on constate

$$P(X + Y = 2 \cap X - Y = 0) \neq P(X + Y = 2)P(X - Y = 0)$$

Exercice 31 : [énoncé]
L'événement $\{X = Y\}$ se décompose en les événements disjoints
$\{X = a_i \cap Y = a_i\}$.
Par hypothèse d'indépendance

$$P\left(\{X = a_i \cap Y = a_i\}\right) = P\left(\{X = a_i\}\right) P\left(\{Y = a_i\}\right) = p_i^2$$

donc

$$P\left(\{X = Y\}\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i^2$$

puis par complémentation

$$P\left(\{X \neq Y\}\right) = 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2$$

Enfin, on conclut sachant

$$1 = \sum_{i=1}^{n} p_i$$

Exercice 32 : [énoncé]
Puisque la fonction g est strictement croissante, les événement $|X| \geqslant a$ et $g(|X|) \geqslant g(a)$ sont identiques. Or l'inégalité de Markov donne

$$E\left(g(|X|)\right) \geqslant g(a)P\left(g(|X|) \geqslant g(a)\right)$$

et donc

$$P\left(|X| \geqslant a\right) \leqslant \frac{E\left(g(|X|)\right)}{g(a)}$$

Exercice 33 : [énoncé]
Rappelons

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p)$$

Considérons la variable aléatoire

$$Y = X - np = X - E(X)$$

Par l'inégalité de Markov

$$P\left(|Y| \geqslant na\right) \leqslant \frac{E(|Y|)}{n\varepsilon}$$

donc

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{E(|Y|)}{n\varepsilon}$$

Or $E(|Y|) \leqslant \sqrt{E(Y^2)}$ avec $E(Y^2) = V(X) = np(1-p)$ donc

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}$$

Exercice 34 : [énoncé]
Par stricte croissance de l'exponentiel, l'événement $X - np > n\varepsilon$ équivaut à l'événement

$$\exp\left(\lambda(X - np - n\varepsilon)\right) \geqslant 1$$

L'inégalité de Markov appliquée à la variable $Y = \exp\left(\lambda(X - np - n\varepsilon)\right)$ permet alors de conclure

$$P\left(\exp\left(\lambda(X - np - n\varepsilon)\right) \geqslant 1\right) \leqslant \frac{E\left(\exp\left(\lambda(X - np - n\varepsilon)\right)\right)}{1}$$

Exercice 35 : [énoncé]
Notons $x_1, \ldots, x_n$ les valeurs prises par X. On a

$$E\left(X\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \text{ et } E\left(X^2\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k$$

avec $p_k = P(X = x_k)$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\sqrt{p_k} \times \sqrt{p_k}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k \sum_{k=1}^{n} p_k$$

et donc $E\left(X\right)^2 \leqslant E\left(X^2\right)$ car $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Exercice 36 : [énoncé]
Notons $p_n = P(X = n)$. On a par définition

$$E(X) = \sum_{n=0}^{N} np_n = \sum_{n=1}^{N} np_n$$

Or $\{X = n\} = \{X > n-1\} \setminus \{X > n\}$ donc

$$p_n = P(X > n-1) - P(X > n)$$

donc

$$E(X) = \sum_{n=1}^{N} nP(X > n-1) - \sum_{n=1}^{N} nP(X > n)$$

Par décalage d'indice dans la première somme

$$E(X) = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)P(X > n) - \sum_{n=1}^{N} nP(X > n)$$

En supprimant le dernier terme assurément nul de la deuxième somme et en y ajoutant un terme nul correspondant à l'indice 0

$$E(X) = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)P(X > n) - \sum_{n=0}^{N-1} nP(X > n)$$

Enfin, en combinant ces sommes

$$E(X) = \sum_{n=0}^{N-1} P(X > n)$$

Exercice 37 : [énoncé]
La valeur de a se déduit de l'identité

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k)=1$$

et l'on obtient $a=1/2^n$.
L'espérance de X est

$$E(X)=a\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}=an\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}=an2^{n-1}=\frac{n}{2}$$

et la variance est

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

Or

$$E(X(X-1))=a\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}=an(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}$$

donc

$$E(X^2)=E(X(X-1))+E(X)=\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{4}=\frac{n(n+1)}{4}$$

puis

$$V(X)=\frac{n}{4}$$

Exercice 38 : [énoncé]
En distinguant les boules, il y a $\binom{2n}{n}$ tirages possibles et, pour $0\leqslant k\leqslant n$, exactement $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ tirages conduisant à l'obtention de k boules rouges.
On en déduit

$$P(X=k)=\frac{\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}{\binom{2n}{n}}$$

L'espérance de X est

$$E(X)=\binom{2n}{n}^{-1}\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

avec

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{n-k}$$

On a

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{n-k}=\binom{2n-1}{n-1}$$

en considérant le coefficient de X^{n-1} dans le développement de

$$(1+X)^{n-1}(1+X)^n=(1+X)^{2n-1}$$

et donc

$$E(X)=n\binom{2n}{n}^{-1}\binom{2n-1}{n-1}=\frac{n}{2}$$

On calcule la variance $V(X)$ par la relation $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ en commençant par calculer $E(X(X-1))$.

$$E(X(X-1))=\binom{2n}{n}^{-1} n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}\binom{n}{n-k}$$

et en considérant le coefficient de X^{n-2} dans le développement de

$$(1+X)^{n-2}(1+X)^n=(1+X)^{2n-2}$$

on obtient

$$E(X(X-1))=n(n-1)\binom{2n}{n}^{-1}\binom{2n-2}{n-2}=\frac{n(n-1)^2}{2(2n-1)}$$

puis

$$E(X^2)=\frac{n^3}{2(2n-1)}$$

et enfin

$$V(X)=\frac{n^2}{4(2n-1)}$$

Exercice 39 : [énoncé]
Puisque

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

l'espérance de Y est donnée par

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

Or

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$$

donc

$$E(Y) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} p^k(1-p)^{n-k}$$

puis par glissement d'indice

$$E(Y) = \frac{1}{p(n+1)}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} p^k(1-p)^{(n+1)-k}$$

et enfin par la formule du binôme avec un terme manquant

$$E(Y) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}$$

Exercice 40 : [énoncé]
a) Dans un groupe donné, le nombre Z d'individus infectés suit une loi binomiale de taille n et de paramètre p. L'échantillon du groupe sera positif si $Z \geqslant 1$. La probabilité qu'un échantillon de groupe soit positif est donc

$$q = \sum_{k=1}^{n} P(Z=k) = 1 - P(Z=0) = 1-(1-p)^n$$

L'infection ou non d'un groupe suit une loi de Bernoulli de probabilité q. Les groupes pouvant être considérés comme indépendants, le nombre X de groupes infectés suit une loi binomiale de taille N/n et de paramètre q.
b) Le nombre Y d'analyses se déduit du nombre X de groupes infectés par la relation

$$Y = \frac{N}{n} + nX$$

L'espérance de Y est

$$E(Y) = \frac{N}{n} + nE(X) = \frac{N}{n}(1+nq) = \frac{N}{n}(1+n-n(1-p)^n)$$

c) Le premier protocole conduit à 1000 analyses alors que le second n'en demande qu'en moyenne $\simeq 196$

Exercice 41 : [énoncé]
a) Les valeurs prises pas X sont les éléments de $\{n, n+1, \dots, 2n\}$.
Distinguons les boules. Le nombre de tirages possibles est $(2n)!$
Les tirages de $n+k$ boules contenant toutes les boules rouges (sans pour autant terminer par une boule rouge) sont au nombre de

$$\binom{n+k}{k} n!n!$$

En effet, on choisit k emplacements pour les boules blanches parmi les $n+k$ correspondant au début du tirage extrayant les n rouges. On positionne ensuite les boules rouges dans les emplacements restants et les boules blanches dans les emplacements réservés et sur la fin du tirage. On a donc

$$P(X \leqslant n+k) = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\binom{n+k}{k}$$

On en déduit

$$P(X = n+k) = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\left[\binom{n+k}{k} - \binom{n+k-1}{k-1}\right] = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\binom{n+k-1}{k}$$

b) L'espérance de X est

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n}(n+k)P(X=n+k)$$

Or

$$(n+k)\binom{n+k-1}{k} = n\binom{n+k}{k}$$

donc

$$E(X) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} n \sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} n \binom{2n+1}{n} = \frac{(2n+1)n}{n+1}$$

Pour calculer la variance, commençons par calculer $E(X(X+1))$.

$$E(X(X+1)) = \sum_{k=0}^{n}(n+k)(n+k+1)P(X=n+k)$$

Or

$$(n+k)(n+k+1)\binom{n+k-1}{k} = n(n+1)\binom{n+k+1}{k}$$

puis

$$E(X(X+1)) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} n(n+1) \binom{2n+2}{n} = 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{(n+2)}$$

donc

$$E(X^2) = E(X^2+X) - E(X) = \frac{n^2(2n+1)(2n+3)}{(n+2)(n+1)}$$

et enfin

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{n^2(2n+1)}{(n+2)(n+1)^2}$$

Exercice 42 : [énoncé]

a) Notons $x_1, \dots, x_n$ les valeurs (entières) prises par X. On a

$$\varphi_X(u) = \sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{iux_k} P(X = x_k)$$

La fonction φ_X est alors combinaison linéaire de fonctions 2π-périodiques (car $x_k \in \mathbb{Z}$) et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

$$\varphi_X(0) = E(1) = 1,\ \varphi_X'(0) = \sum_{k=1}^n ix_k P(X = x_k) = iE(X) \text{ et } \varphi_X''(0) = -E(X^2)$$

b) Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p

$$\varphi_X(u) = (1-p) + p\mathrm{e}^{iu}$$

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p

$$\varphi_X(u) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \mathrm{e}^{iku} = (1-p+p\mathrm{e}^{iu})^n$$

c) Avec les notations qui précèdent

$$\int_0^{2\pi} \varphi_X(u)\mathrm{e}^{-iux_0}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^n P(X = x_k) \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{iu(x_k - x_0)}\,\mathrm{d}u$$

Puisque $x_k - x_0$ est un entier

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{iu(x_k-x_0)}\,\mathrm{d}u = \begin{cases} 0 & \text{si } x_k \neq x_0 \\ 2\pi & \text{si } x_k = x_0 \end{cases}$$

et donc

$$\int_0^{2\pi} \varphi_X(u)\mathrm{e}^{-iux_0}\,\mathrm{d}u = 2\pi P(X = x_0)$$

Si $\varphi_X = \varphi_Y$ alors

$$\forall x_0 \in \mathbb{Z}, P(X = x_0) = P(Y = x_0)$$

et donc $X = Y$.

d) Notons que $X + Y$ prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}$ comme X et Y.

$$\varphi_{X+Y}(u) = E\left(\mathrm{e}^{iu(X+Y)}\right) = E\left(\mathrm{e}^{iuX}\mathrm{e}^{iuY}\right) = E\left(\mathrm{e}^{iuX}\right)E\left(\mathrm{e}^{iuY}\right) = \varphi_X(u)\varphi_Y(u)$$

car les variables X et Y sont supposées indépendantes.

e) Une loi binomiale de paramètres n et p peut se comprendre comme la somme de n loi de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

Avec cet exercice, on perçoit la trace dans une situation particulière de résultats beaucoup plus généraux. Il est assez fréquent d'étudier une variable aléatoire par la fonction caractéristique associée.