10:57 jeu. 17 oct.

Sol Réduction

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi_D(x) = X^3 - 2X^2 + X$

$\chi_D(x) = X(X-1)^2$

$Sp(D) = \{0, 1\}$.

D est-elle diagonalisable ?

```
In [5]: poly(D)
Out[5]:
array([ 1.00000000e+00, -2.00000000e+00,  1.00000000e+00,
       -9.19738868e-17])

In [6]: eigvals(D)
Out[6]: array([ 9.19738868e-17,  1.00000000e+00,  1.00000000e+00])
```

$1 \quad 2 \quad 1 \quad 0$

$0 \quad 1 \quad 1$

```
from numpy import *
from numpy.linalg import *
D=array([[0,1,-1],[-1,2,-1],[-1,1,0]])
#polyn caract de A poly(A), renvoie ses coeff par ordre décroissant
#det(A)
#eigvals(A) renvoie les val propres répétées AVEC LEURS MULTIPLICIT
```

~~$\chi_D(x) = X(X-1)^2$ admet une racine multiple (1), donc D n'est pas diag^{ble}~~

Error

On a :

$$\left(\chi_D(X) \text{ scindé à racines simples} \right) \Longrightarrow D \text{ diag}^{ble}$$

C-ex : $D = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ diagonalisable

$\chi_D(X) = (X-1)^n$; scindé à rac. multiples

$\chi_D(X) = X(X-1)^2$ scindé à racines multiple (1), donc D n'est pas diag^{ble}

Error

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A = PTP^{-1}}$$

$$A^n = \; ?$$

$A^n = P \cdot T^n \cdot P^{-1}$ connues

$T^n = \; ?$

$$T = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ diag par blocs}$$

A (ou f) n'est pas diag$^{\text{ble}}$

car $\dim(E_1(f)) \neq \overbrace{m_1(f)}^{=2}$

facile

$$T^n = \left(\begin{array}{c|c} (-1)^n & 0 \quad 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \end{array}\right)$$

mat_calcul_easy

classique

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = (I_2 + N)^n \text{ où } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k$$

$$= \underline{I_2 + nN} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bin_Newton

nilpot $N^2 = 0$

$C_n^0 = 1$

$C_n^1 = n$

Pour $\varepsilon_3 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

On a :

$f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \iff (\quad)$

?

$\iff \{$

$$\boxed{A \text{ n'est pas diag}^{\text{ble}}}$$

$$\chi_f(x) = (x+1)(x-1)^2$$

$$S_p(f) = \{-1, 1\}$$

$$\begin{cases} m_{-1} = 1 \\ m_1 = 2 \end{cases}$$

$$A = P\,T\,P^{-1}$$

$P = (\; \boxed{\ast} \; \boxed{\ast} \; \boxed{\;} \;)$; $T = \text{mat}(f)_S$

$$\begin{array}{c|ccc} & f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) \\ \hline \varepsilon_1 & -1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_2 & 0 & 1 & 1 \\ \varepsilon_3 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$\text{mat}(f)_{B_c}$

$S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$

1 vect prop $\rightarrow \boxed{f(\varepsilon_2) = 1.\varepsilon_2}$

$$\begin{cases} f(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1 & (ok) \\ f(\varepsilon_2) = 1.\varepsilon_2 & (ok) \\ f(\varepsilon_3) = \varepsilon_3 + \varepsilon_2 & ? \end{cases}$$

$U = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$f(U) = -U \iff \ldots$

$E_{-1}(f)$

Pour $U = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$f(U) = 1.U \iff \ldots$

$E_1(f)$

$$\boxed{f(\varepsilon_3) = 1.\varepsilon_3}$$