Suites
Résumé

I) Rappels et Compléments

1) Suites bornées

Définition 1

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1) (U_n) est dite majorée si et seulement si :

$$\left(\exists M\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ U_n\leqslant M\right)$$

2) (U_n) est dite minorée si et seulement si :

$$\left(\exists m\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ U_n\geqslant m\right)$$

3) (U_n) est dite bornée si et ssi elle est à la fois majorée et minorée.

Autrement dit :

$$\left(\exists (m,M)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ m\leqslant U_n\leqslant M\right)$$

Prop 2

Soit $(U_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On a :

$$(U_n) \text{ est bornée} \iff \left(\exists C\geqslant 0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ |U_n|\leqslant C\right)$$

2) Monotonie d'une suite

$(U_n)_{n \geq n_0}$ sera une suite réelle.

Déf 1

1) $(U_n)_{n \geq n_0}$ est croissante si et seulement si :

$$\forall n \geq n_0, \; U_n \leq U_{n+1}$$

2) $(U_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante si et seulement si :

$$\forall n \geq n_0, \; U_n \geq U_{n+1}$$

3) $(U_n)_{n \geq n_0}$ est strictement croissante si et seulement si :

$$\forall n \geq n_0, \; U_n < U_{n+1}$$

4) $(U_n)_{n \geq n_0}$ est strictement décroissante si et seulement si :

$$\forall n \geq n_0, \; U_n > U_{n+1}$$

5) $(U_n)_{n \geq n_0}$ est constante si et seulement si :

$$\forall n \geq n_0, \; U_n = U_{n+1}$$

6) $(U_n)_{n \geq n_0}$ est monotone si et seulement si elle est croissante ou décroissante

7) $(U_n)_{n \geq n_0}$ est strictemat monotone si et seulement si elle est strictemat croissante ou strictemat décroissante.

Prop 2

$(U_n)_{n\geq n_0}$ est Constante $\Leftrightarrow \left(\exists C\in\mathbb{R},\ \forall n\geq n_0,\ U_n = C\right)$

Prop 3

Supposons que : $\left(\forall n\geq n_0,\ U_n > 0\right)$

On a :

1) $(U_n)_{n\geq n_0}$ est Croissante $\Leftrightarrow \left(\forall n\geq n_0,\ \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1\right)$

2) $(U_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante $\Leftrightarrow \left(\forall n\geq n_0,\ \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1\right)$

Pareil pour strictement croissante ...

Déf 4

$(U_n)_{n\geq 0}$ est dite stationnaire si et seulement s'il existe un entier N_0 tel que la suite soit Constante à partir de N_0.

Autrement dit :

$$\exists N_0\in\mathbb{N},\ \exists C\in\mathbb{R},\ \forall n\geq N_0,\ U_n = C$$

3) Sous suite d'une suite

Déf

Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle.

On appelle sous suite de $(U_n)_{n\geq 0}$ toute suite de la forme $\left(U_{\varphi(n)}\right)_{n\geq 0}$; où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Vocabulaire

On parle aussi de « suite extraite » de $(U_n)_{n\geq 0}$.

II) Limite d'une suite

1) Limite infinie d'une suite

Déf 1

Soit $(U_n)_n$ une suite réelle.

$$\left(\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty\right) \iff \left(\forall A>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ U_n\geq A\right)$$

Déf

Soit $(U_n)_n$ une suite réelle.

$$\left(\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty\right) \Leftrightarrow \left(\forall A<0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ U_n\leq A\right)$$

2) Limite finie d'une suite

Déf 1

Soit $l\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = l \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ |U_n-l|\leq\varepsilon\right)$$

Déf 2

1) Une suite est dite convergente quand elle possède une limite finie.

2) Dans le cas contraire, elle est dite divergente.

3) Limite d'une sous suite

Prop 1

Soit $l\in\overline{\mathbb{R}}$ $(=\mathbb{R}\sqcup\{+\infty,-\infty\})$.

Si $\lim_n U_n = l$ alors $\lim_n U_{\varphi(n)} = l$, pour toute sous suite $(U_{\varphi(n)})$.

Corollaire 2

Pour montrer qu'une suite diverge, il suffit de trouver deux de ses sous suites qui tendent vers deux limites différentes.

4) Sous suites paires et impaires

Prop

Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $\begin{cases} \lim\limits_{n} U_{2n} = l \\ \lim\limits_{n} U_{2n+1} = l \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n} U_n = l$

5) Bornitude d'une suite Convergente

Prop

Toute suite Convergente est bornée.

Attention !

Mais la réciproque est en général fausse.

III) Propriétés sur les limites des suites

1) Propriétés générales

Prop 1

Soit $(U_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On a :

1) $\lim\limits_{n} U_n = \ell \iff \lim\limits_{n} |U_n - \ell| = 0$

2) $\lim\limits_{n} U_n = 0 \iff \lim\limits_{n} |U_n| = 0$

3) $\lim\limits_{n} U_n = \ell \implies \lim\limits_{n} |U_n| = |\ell|$

4) $\lim\limits_{n} U_n = \ell \iff \lim\limits_{n} (-U_n) = -\ell$

Prop 2 (ordre et limite)

Soient $(U_n)_n$ et $(V_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites convergentes. On a :

1) $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leqslant V_n\right) \implies \left(\lim\limits_{n} U_n \leqslant \lim\limits_{n} V_n\right)$

2) $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ U_n < V_n\right) \implies \left(\lim\limits_{n} U_n \leqslant \lim\limits_{n} V_n\right)$

Attention !

L'implication suivante est en général **fausse** :

$$\left(\forall n \in \mathbb{N},\ U_n < V_n\right) \implies \left(\lim\limits_{n} U_n < \lim\limits_{n} V_n\right)$$

NB :

La $\boxed{\text{Prop 2}}$ reste valable si on suppose que $(U_n \leq V_n)$ à partir d'un rang ; Càd :

$$(\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, U_n \leq V_n)$$

Prop 3

Si $\lim_n U_n = \ell > 0$, alors la suite $(U_n)_n$ est minorée par un réel strictement positif à partir d'un rang.

Corollaire 4

Si $\lim_n U_n = \ell > 0$, alors la suite $(U_n)_n$ est strictement positive à partir d'un rang.

Corollaire 5

Si $\lim_n U_n = \ell < 0$, alors la suite $(U_n)_n$ est majorée par un réel strictement négatif à partir d'un rang.

Corollaire 6

Si $\lim_{n} U_n = \ell < 0$, alors la suite $(U_n)_n$ est strictement négative à partir d'un rang.

Corollaire 7

Si $\lim_{n} U_n = \ell \neq 0$, alors la suite $(U_n)_n$ ne s'annule pas à partir d'un rang.

Autrement dit

Si $\lim_{n} U_n = \ell \neq 0$, alors :

$$\boxed{\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ U_n \neq 0}$$

Prop 8

Supposons que : $(\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leqslant V_n)$. On a :

1) $\lim_{n} U_n = +\infty \Longrightarrow \lim_{n} V_n = +\infty$

2) $\lim_{n} V_n = -\infty \Longrightarrow \lim_{n} U_n = -\infty$

Prop 9

1) Soit $l \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N},\ |U_n - l| \leq \alpha_n \\ \lim_n \alpha_n = 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \lim_n U_n = l$$

2) $$\begin{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N},\ |U_n| \leq \alpha_n \\ \lim_n \alpha_n = 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \lim_n U_n = 0$$

Corollaire 10

Le produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle est une suite de limite nulle.

(Théorème des gendarmes)

Prop 11

Soit $l \in \mathbb{R}$.

Si $\begin{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n \leq U_n \leq \beta_n \\ \lim_n \alpha_n = l \text{ et } \lim_n \beta_n = l \end{pmatrix}$ alors $\left(\lim_n U_n = l\right)$

2) Opérations sur les suites

Prop 1

$\lim (U_n+V_n)$ est donnée par le tableau suivant :

$\lim U_n$ \ $\lim V_n$	$L \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$l \in \mathbb{R}$	$L+l$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

FI : « Forme indéterminée »

Prop 2 (Combinaison linéaire de suites convergentes)

1) Toute combinaison linéaire de deux suites convergentes est une suite convergente.

2) Le cas échéant, on a :

$$\lim_n (\alpha U_n + \beta V_n) = \alpha \lim_n U_n + \beta \lim_n V_n$$

Corollaire 3

La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente.

Attention

⚠ Pour la somme de deux suites divergentes, on ne peut rien conclure ; tout est possible.

Prop 4 (Produit)

$\lim (U_n V_n)$ est donnée par le tableau suivant :

$\lim U_n$ \ $\lim V_n$	$L \in \mathbb{R}^*$	0	$\pm\infty$
$l \in \mathbb{R}^*$	lL	0	$\pm\infty$ selon la règle des signes
0	0	0	F.I
$\pm\infty$	$\pm\infty$ selon la règle des signes	F.I	$\pm\infty$ selon la règle des signes

Corollaire 5

1) Le produit de deux suites convergentes est une suite convergente.

2) Dans ce cas, on a :

$$\lim_n (U_n V_n) = (\lim U_n) \cdot (\lim V_n)$$

Prop 6

1) $\left(\lim_{n} U_n = \ell \in \mathbb{R}^*\right) \Rightarrow \left(\lim_{n} \frac{1}{U_n} = \frac{1}{\ell}\right)$

2) $\begin{pmatrix} \lim_{n} U_n = \ell \in \mathbb{R} \\ \lim_{n} V_n = L \in \mathbb{R}^* \end{pmatrix} \Rightarrow \lim_{n} \frac{U_n}{V_n} = \frac{\ell}{L}$

3) Théorème de la limite monotone

Prop 1

1) Si $(U_n)_n$ est croissante et majorée, alors converge, et on a :

$$\lim_{n} U_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} (U_n)$$

2) Si $(U_n)_n$ est croissante et non majorée alors $\lim_{n} U_n = +\infty$.

Notations

1) $\sup_{n \in \mathbb{N}} (U_n)$ désigne $\sup\left(\{U_n / n \in \mathbb{N}\}\right)$

2) $\inf_{n \in \mathbb{N}} (U_n)$ désigne $\inf\left(\{U_n / n \in \mathbb{N}\}\right)$

Prop 2

1) Si $(U_n)_n$ est décroissante et minorée, alors converge, et on a :

$$\lim_n U_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} (U_n)$$

2) Si $(U_n)_n$ est décroissante et non minorée alors $\lim_n U_n = -\infty$.

NB :

1) Supposons que $(U_n)_n$ est croissante et majorée.

Notons $\lim_n U_n = \ell$.

On a : $(\forall n\in\mathbb{N},\ U_n \leq \ell)$

2) Supposons que $(U_n)_n$ est strict croissante et majorée.

Notons $\lim_n U_n = \ell$.

On a : $(\forall n\in\mathbb{N},\ U_n < \ell)$

3) Supposons que $(U_n)_n$ est décroissante et minorée.

Notons $\lim_n U_n = \ell$.

On a : $(\forall n\in\mathbb{N},\ U_n \geq \ell)$

4) Supposons que $(U_n)_n$ est strict décroissante et minorée.

Notons $\lim_n U_n = \ell$.

On a : $(\forall n\in\mathbb{N},\ U_n > \ell)$

4) Suites adjacentes

Déf 1

Deux suites sont dites adjacentes si et seulement si :

1) L'une est croissante .
2) L'autre est décroissante .
3) Leur différence tend vers 0 .

Prop 2

Si deux suites sont adjacentes, alors elles sont convergentes, et ont la même limite.

5) Caractérisation séquentielle de la densité

Rappel :

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement entre deux éléments de $\mathbb{R}$ existe au moins un élément de A .

Prop :

Soit $A \subset \mathbb{R}$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) A est dense dans $\mathbb{R}$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il existe une suite $(a_n)_n$ à valeurs dans A telle que : $\lim_n a_n = x$

6) Théorème de Bolzano – Weierstrass

On sait qu'une suite bornée ne converge pas forcémment.
Toutefois, on a le résultat suivant :

Prop : (Théorème de Bolzano – Weierstrass)

Toute suite réelle bornée possède une sous – suite convergente.

IV) Brève extension aux suites Complexes

1) Généralités

Vocabulaire

Soit $(U_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

1) Les suites $(Re(U_n))_n$ et $(Im(U_n))_n$ s'appelent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la suite complexe $(U_n)_n$.

2) $(Re(U_n))_n$ et $(Im(U_n))_n$ sont deux suites réelles.

---

2) Suite Complexe bornée

Déf 1

Soit $(U_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

$(U_n)_n$ est dite **bornée** si et seulement si :

$$\left(\exists C \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, |U_n| \leq C \right)$$

Prop 2

Une suite complexe est bornée si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont bornées.

---

3) Limite d'une suite Complexe

Déf 1

Soient $(U_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{C}$.

On dit que $(U_n)_n$ admet l comme limite si et seulement la suite réelle $(|U_n - l|)_n$ tend vers 0.

Prop 2

Soit $(U_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{C}$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $\lim_n U_n = l$

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |U_n - l| \leq \varepsilon$

3) $\lim_n Re(U_n) = Re(l)$ et $\lim_n Im(U_n) = Im(l)$

Déf 3

1) Une suite complexe $(U_n)_n$ est dite convergente quand elle admet une limite $l \in \mathbb{C}$.

2) Dans le cas contraire, elle est dite divergente.

Prop 4

1) Une suite complexe $(U_n)_n$ converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent.

2) Dans ce cas on a :

$$\lim_n U_n = \lim_n \big(Re(U_n)\big) + i \lim_n \big(Im(U_n)\big)$$

NB :

Les propriétés vues sur les suites réelles valent aussi pour les suites Complexes.

Par exemple :

1) $\begin{pmatrix} \lim U_n = l \in \mathbb{C} \\ \lim V_n = L \in \mathbb{C} \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \lim_n (\alpha U_n + \beta V_n) = \dots\right)$

2) $\begin{pmatrix} \lim U_n = l \in \mathbb{C} \\ \lim V_n = L \in \mathbb{C} \end{pmatrix} \Rightarrow \lim_n U_n V_n = l L$

3) $\begin{pmatrix} \lim U_n = l \in \mathbb{C} \\ \lim V_n = L \in \mathbb{C}^* \end{pmatrix} \Rightarrow \lim_n \frac{U_n}{V_n} = \frac{l}{L}$

4) $\begin{pmatrix} \forall n, |U_n - l| \leq \alpha_n \\ \text{où } l \in \mathbb{C} \\ \lim_n \alpha_n = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lim_n U_n = l$

5) $\begin{pmatrix} (U_n)_n \text{ bornée} \\ \lim_n V_n = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lim_n (U_n V_n) = 0$

4) Théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites Complexes

Prop :

Toute suite Complexe bornée possède une sous-suite Convergente.

N-B :

Une sous-suite de la sous-suite $(U_{\varphi(n)})_n$ est de la forme $(U_{\varphi(\psi(n))})_n$, ~~non pas~~ $(U_{\psi(\varphi(n))})_n$.

V) Suites particulières

1) Suites arithmético-géométriques

Déf 1

On appelle suite arithmético-géométrique toute suite $(U_n)_{n\geq 0}$ vérifiant :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ U_{n+1}=aU_n+b$$

où $a, b\in\mathbb{R}$.

Prop 2 (Terme général)

Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmético-géométrique vérifiant :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ U_{n+1}=aU_n+b$$

où $a, b\in\mathbb{R}$, avec $a\neq 1$.

Soit $l\in\mathbb{R}$ vérifiant : $l=al+b$.

La suite $(U_n-l)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison a.

2) Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coéfficients constants

Déf 1

On appelle suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coéfficients constants, toute suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant :

$$\forall n \geqslant 0, \quad U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.

NB 1

On peut aussi avoir l'une des formes suivantes :

$$\forall n \geqslant 2, \quad U_n = aU_{n-1} + bU_{n-2}$$

ou

$$\forall n \geqslant 1, \quad U_{n+1} = aU_n + bU_{n-1}$$

NB 2

On peut avoir aussi la forme suivante :

$$\forall n \geqslant 0, \quad \alpha U_{n+2} + \beta U_{n+1} + \gamma U_n = 0$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, avec $\alpha \neq 0$

Prop 2 (Détermination du terme général)

Considérons la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant :

$$\forall n\geqslant 0,\ U_{n+2} = bU_{n+1} + cU_n$$

où $b, c \in \mathbb{R}$.

Notons : (E_c) : $r^2 = br + c$; son équation caractéristique.

Notons $\Delta = b^2 + 4c$ (son discriminant).

Cas 1 : Si $\Delta > 0$

Soient $r_1 \neq r_2$ les deux solutions de (E_c).

Le terme général de la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est de la forme :

$$U_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

où $A, B \in \mathbb{R}$.

Cas 2 : Si $\Delta = 0$

Soit r_1 l'unique solution de (E_c).

Le terme général de la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est de la forme :

$$U_n = Ar_1^n + Bn\,r_1^n = (A+Bn)r_1^n$$

où $A, B \in \mathbb{R}$.

Cas 3 : Si $\Delta < 0$

Soient r_1 et $\overline{r_1}$ les deux solutions complexes de (E_c).

Notons $r_1 = \rho e^{i\theta}$ son écriture exponentielle.

Le terme général de la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est de la forme :

$$U_n = \rho^n \left(A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta) \right)$$

où $A, B \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Fin}}$