Polynômes de Bernstein

Soit n un entier naturel. On note $[\![1,n]\!]$ l'ensemble des entiers allant de 1 à n.
On appelle polynômes de Bernstein de degré n les polynômes réels:

$$B_{n,k}=\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} \text{ avec } k\in\{0,1,\dots,n\}$$

Dans tout le problème, on identifie polynôme et fonction polynomiale associée.

Partie I : Polynômes de Bernstein

1. Représenter sur un même graphique les fonctions $x\mapsto B_{3,k}(x)$ pour $k=0,1,2,3$ et $x\in[0,1]$.

2.a Calculer $\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}$. En déduire que pour tout $x\in[0,1]$, $0\le B_{n,k}(x)\le 1$.

2.b Calculer $\sum_{k=0}^{n}kB_{n,k}$, $\sum_{k=0}^{n}k(k-1)B_{n,k}$ puis $\sum_{k=0}^{n}k^2B_{n,k}$.

3. Exprimer $B'_{n,k}$ en fonction de $B_{n-1,k-1}$ et $B_{n-1,k}$ pour $n\ge 1$.

4. Etablir que la famille $(B_{n,k})_{0\le k\le n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. Pour $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on pose $B(P)=\sum_{k=0}^{n}P\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}$.

5.a Montrer que B est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

5.b Déterminer le noyau de B. Qu'en déduit-on ?

Partie II : Théorème de Weierstrass

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose P_n la fonction définie par : $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}(x)$.

1. Calculer $P_n(x)$ lorsque $f(x)=1$, $f(x)=x$ et $f(x)=x^2$.
   Vérifier qu'à chaque fois $P_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(x)$ pour tout $x\in[0,1]$.

2. On se propose de généraliser le résultat ci-dessus au cas général $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue.

2.a Calculer $\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2B_{n,k}(x)$.

2.b Soit $x\in[0,1]$ et $\varepsilon>0$. La fonction f étant continue en x :

$$\exists\alpha>0\,,\ \forall t\in[0,1]\ :\ |x-t|\le\alpha\Rightarrow|f(x)-f(t)|\le\varepsilon/2\,.$$

On pose $A=\left\{k\in[\![0,n]\!]/\left|x-\frac{k}{n}\right|<\alpha\right\}$ et $B=\left\{k\in[\![0,n]\!]/\left|x-\frac{k}{n}\right|\ge\alpha\right\}$.

Montrer que $\sum_{k\in B}B_{n,k}(x)\le\frac{x(1-x)}{n\alpha^2}\le\frac{1}{4n\alpha^2}$.

2.c En déduire que $|P_n(x)-f(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2n\alpha^2}$ avec $M=\sup_{[0,1]}|f|$.

Conclure que $P_n(x)$ converge vers $f(x)$ quand $n\to+\infty$

3.a Etablir que $P'_n(x)=n\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n-1,k}(x)$.

3.b En déduire que si f est croissante sur $[0,1]$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, P_n est croissante sur $[0,1]$.