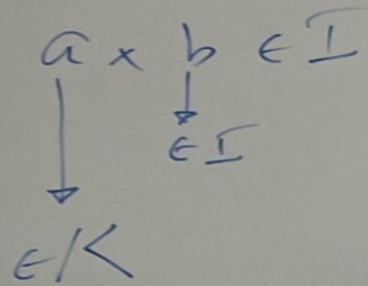


et $(L(D))$

Exercice 2 :

- 1) Quels sont les sous-corps de \mathbb{Q} ?
- 2) Quels sont les idéaux d'un corps K ?



Ex 2)

20)

Soit I idéal de K , en $(K, +, \times)$

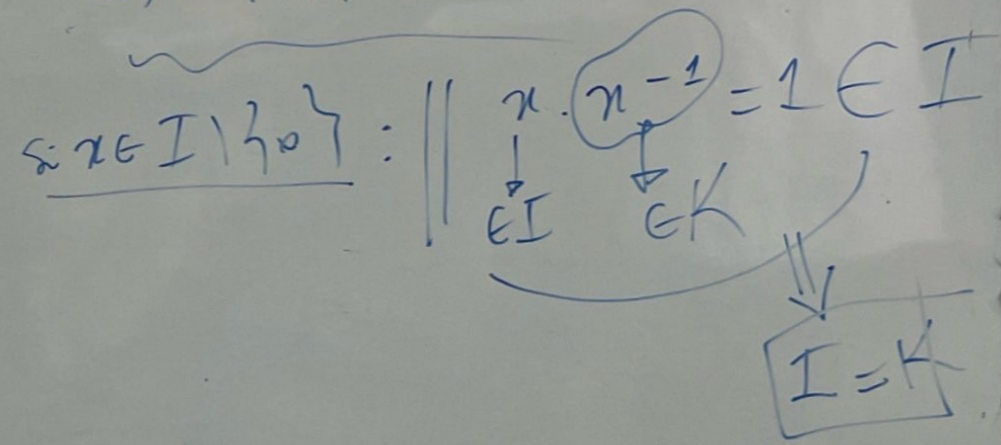
est un Corps.

$I = ?$

Bonjour \langle vos idées \rangle

$1 \in I \rightsquigarrow I = K$

$$1 = \underbrace{x}_{\in I} \cdot x^{-1} \in I \implies x \in K \setminus \{0\}$$



Sol: (Bien rédigée)

1) Cas 1: Si $I = \{0\}$

2) Cas 2: Si $I \neq \{0\}$

Soit $x \in I \setminus \{0\}$. (x est donc inversible
Car $x \neq 0 \in K$
Un corps)

Alors $x \cdot x^{-1} \in I$

Car $x \in I$ et $x^{-1} \in K$

$\Rightarrow 1 \in I$, et donc $I = K$

$\forall I$: I idéal de $K \Leftrightarrow (I = \{0\} \text{ ou } I = K)$

Soit K un sous-corps de $(\mathbb{Q}[X] / (1+X))$
 $K = ?$

Soit K un sous-corps de $(\mathbb{Q}[1/x])$

$K = ?$

Rappel

$1 \in K$

$\forall x, y \in K, x + y \in K$

$\forall x, y \in K, x \cdot y \in K$

$\forall x \in K \setminus \{0\}, x^{-1} \in K$

Brouillon

Soit K un sous-corps de $(\mathbb{Q}[1/x])$

$K = ?$

$(K, +)$ groupe

On a: $1 \in K$
 $\forall x, y \in K, x + y \in K$
Propriété $\forall x, y \in K, x \cdot y \in K$
 $\forall x \in K \setminus \{0\}, x^{-1} \in K$

Piste 1 $1 \in K \Rightarrow \langle 1 \rangle \subset K$
 $\{k \cdot 1/k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow \mathbb{Z} \subset K$ *

Piste 2 $((K, +) \text{ groupe et } 1 \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{Z}, k \cdot 1 \in K)$
 $\Rightarrow \mathbb{Z} \subset K$ *

On a $(\forall n \in \mathbb{N}^*, n^{-1} \in K)$ (car $n \in K$)
 $\Rightarrow \forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}^*, m \times n^{-1} \in K$
 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Q}, n \in K \Rightarrow \mathbb{Q} \subset K \Rightarrow \mathbb{Q} = K$

$\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$
 $= m \times n^{-1}$
 \downarrow
 $\in K \quad \in K$
 $\Rightarrow \mathbb{Q} \subset K$

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif.

Définition : Soit I un idéal de A . On appelle *radical* de I la partie \sqrt{I} de A définie par

$$\sqrt{I} = \{a \in A, \exists n \in \mathbb{N}^*, a^n \in I\}$$

1) Montrer que \sqrt{I} est un idéal de A contenant I .

Ex 7 (radical d'un idéal)

$(A, +, \times)$ ann.

I idéal

$$a \in \sqrt{I} \stackrel{\text{d'f}}{\iff} (\exists n \in \mathbb{N}^+, a^n \in I)$$

Hypothèse
Énoncé

1) i) M. que $I \subset \sqrt{I}$:

ii) M. que \sqrt{I} est un idéal

Ex 7 (radical d'un idéal)

$(A, +, \times)$ ann.

I idéal

$a \in \sqrt{I} \iff \overset{\text{d'f}}{(\exists n \in \mathbb{N}^*, a^n \in I)}$

Hypothèse
Énoncé

1) i) M. que $I \subset \sqrt{I}$:

Soit $x \in I$. On a $x \in \sqrt{I}$.

Càd: $(\exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in I)$

$n=1$ convient.

D'où $x \in \sqrt{I}$ \square

ii) M. que \sqrt{I} est un idéal

a) $0 \in \sqrt{I}$?

Ex 7 (radical d'un idéal)

$(A, +, \times)$ ann.

I idéal

$a \in \sqrt{I} \iff (\exists n \in \mathbb{N}^*, a^n \in I)$

Hypothèse
Énoncé

1) i) Montrer que $I \subset \sqrt{I}$:

Soit $x \in I$, on a $x \in \sqrt{I}$

Càd: $(\exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in I)$

$n=1$ convient.

D'où $x \in \sqrt{I}$ \square

ii) Montrer que \sqrt{I} est un idéal

a) $0 \in \sqrt{I}$?

b) $a, b \in \sqrt{I}$ (hypothèse) $\Rightarrow a^n, b^n \in I$

c) $a \in A, b \in \sqrt{I}$

$a \cdot b \in \sqrt{I}$

$(ab)^n = a^n \cdot b^n \in I$

Ex 7 (radical d'un idéal)

$(A, +, \cdot)$ ann. c.o.

I idéal

$a \in \sqrt{I} \iff (\exists n \in \mathbb{N}^*, a^n \in I)$

Hypothèse
Énoncé