et $(\mathcal{L}(E)$ ...

Exercice 2 :

1) Quels sont les sous-corps de $\mathbb{Q}$?
2) Quels sont les idéaux d'un corps K ?

$a \times b \in I$

$a \to \in K$, $b \to \in I$

Ex 2)

2°) Soit I idéal de K, où $(K, +, \times)$ est un corps.

$I = ?$

Brouillon «vos idées»

$1 \in I \longrightarrow I = K$

$1 = x \cdot x^{-1}$

$\hookrightarrow x \in K \setminus \{0\}$

si $x \in I \setminus \{0\}$: $\| \; x \cdot x^{-1} = 1 \in I$

$x \to \in I$, $x^{-1} \to \in K$

$\Downarrow$

$\boxed{I = K}$

Sol : (Bien rédigée)

1) Cas 1 : Si $I=\{0\}$

SI 2) Cas 2 : Si $I\neq\{0\}$

Soit $x\in I\setminus\{0\}$. (x est donc inversible car $x\neq 0$ et K un corps)

Alors $x\cdot x^{-1}\in I$

Car $x\in I$ et $x^{-1}\in K$

$\Longrightarrow 1\in I$, et donc $\boxed{I=K}$

$\boxed{\text{c/c : } I \text{ idéal de } K \Longleftrightarrow (I=\{0\} \text{ ou } I=K)}$

Soit K un sous-corps de $(\mathbb{Q}, +, \times)$

$K = ?$

Soit K un sous-corps de $(\mathbb{Q}, +, \times)$

$K = ?$

Rappel : On a :

$1 \in K$

$\forall x, y \in K, x + y \in K$

$\forall x, y \in K, x \times y \in K$

$\forall x \in K \setminus \{0\}, x^{-1} \in K$

Soit K un sous-corps de $(\mathbb{Q},+,\times)$

Brouillon

$K = ?$

Rappel : On a :
$1 \in K$
$\forall x,y \in K,\ x+y \in K$
$\forall x,y \in K,\ x \times y \in K$
$\forall x \in K \setminus \{0\},\ x^{-1} \in K$

$(K,+)$ groupe

Piste 1 : $1 \in K \Longrightarrow \underbrace{\langle 1 \rangle}_{\{k.1 / k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}} \subset K$

$\Rightarrow \boxed{\mathbb{Z} \subset K}$ *

Piste 2 : $((K,+)$ groupe et $1 \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{Z}, k.1 \in K)$

$\Rightarrow \boxed{\mathbb{Z} \subset K}$ *

On a $(\forall n \in \mathbb{N}^*, n^{-1} \in K)$ (car $n \in K$)

$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}^*, m \times n^{-1} \in K$

$\Rightarrow \forall r \in \mathbb{Q}, r \in K \Rightarrow \mathbb{Q} \subset K \Rightarrow \boxed{\mathbb{Q} = K}$

$\underbrace{\frac{m}{n}}_{\in \mathbb{Q}} = \underbrace{m}_{\in K} \times \underbrace{n^{-1}}_{\in K !}$

$\Rightarrow \mathbb{Q} \subset K$? ✓

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif.

Définition : *Soit I un idéal de A. On appelle* radical *de I la partie $\sqrt{I}$ de A définie par*

$$\sqrt{I} = \{a \in A,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ a^n \in I\}$$

1) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A contenant I.

Ex7 (radical d'un idéal)

$(A, +, \times)$ ann.

I idéal

$a \in \sqrt{I} \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} (\exists n \in \mathbb{N}^*, a^n \in I)$

Hypothèses
Énoncé

Scanned with CamScanner

1) i) M. que $I \subset \sqrt{I}$:

ii) M. que $\sqrt{I}$ est un idéal

Ex 7 (radical d'un idéal)

Hypothèses Énoncé

$(A, +, \times)$ ann.

I idéal

$a \in \sqrt{I} \overset{\text{déf}}{\iff} (\exists n \in \mathbb{N}^*, a^n \in I)$

Ex7 (radical d'un idéal)

$(A, +, \times)$ ann.

I idéal

$a \in \sqrt{I} \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} (\exists n \in \mathbb{N}^*, a^n \in I)$

Hypothèses
Énoncé

1) i) M. que $I \subset \sqrt{I}$:

Soit $x \in I$. M. que $x \in \sqrt{I}$.

Càd : $(\exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in I)$

$n = 1$ Convient.

D'où $x \in \sqrt{I}$ $\square$

ii) M. que $\sqrt{I}$ est un idéal

a) $0 \in \sqrt{I}$?

Ex 7 (radical d'un idéal)

Hypothèses / Énoncé

$(A, +, \times)$ ann co

I idéal

$a \in \sqrt{I} \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} (\exists n \in \mathbb{N}^*, a^n \in I)$

1) i) M. que $I \subset \sqrt{I}$:

Soit $x \in I$. M. que $x \in \sqrt{I}$

Càd : $(\exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in I)$

$n = 1$ convient.

D'où $x \in \sqrt{I}$ $\square$

ii) M. que $\sqrt{I}$ est un idéal

a) $0 \in \sqrt{I}$?

b) $a^n \in I$, $b^p \in I$ $(a+b)^{n+p}$ $n \geq 1$ $b^n \in I$

c) $a \in A$, $b \in \sqrt{I}$?

$a \cdot b \in \sqrt{I}$? ann co

$(ab)^n = a^n \cdot b^n \in I$

$a^n \in A$, $b^n \in I$