09:33 lun. 14 oct.

Cours Réduction

On a alors : $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{d_i}$ $\quad d_i = m_i$

Donc $\chi_f(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}$. $\quad = ?$

D'autre part, on a : $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{m_i}$

D'où

$$\boxed{\begin{aligned} \chi_f(X) &= \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{d_i} \\ \chi_f(X) &= \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{m_i} \end{aligned}}$$

irréductibles unitaires distincts

On a : $\begin{cases} n = \sum_{i=1}^{s} d_i \\ n = \sum_{i=1}^{s} m_i \end{cases}$

Et on sait que : $\forall i,\ d_i \leq m_i$ $\quad \dim(E_{\lambda_i}) \leq m_{\lambda_i}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{s} \underbrace{(m_i - d_i)}_{\geq 0} = 0$

$\Rightarrow \forall i,\ m_i - d_i = 0$

$\boxed{\forall i,\ d_i = m_i}$

Somme nulle de nombres positifs donc tous les termes sont nuls

Scanned with CamScanner

Q-exprel

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ vérifiant :

$$f^2 - 3f + 2I_E = 0$$

Q-express

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ vérifiant :

$$f^2 - 3f + 2I_E = 0$$

Justifier que f est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Rép :

$P(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de f, scindé dans $\mathbb{R}$ et à racines simples.

D'où f est diagonalisable dans $\mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

lun. 14 oct.

Cours Réduction

1) i) $(\alpha P+\beta Q)(f) = \alpha P(f) + \beta Q(f)$

ii) $(\alpha P+\beta Q)(A) = \alpha P(A) + \beta Q(A)$

2) i) $(P\cdot Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$

ii) $(P\cdot Q)(A) = P(A) \times Q(A)$

Coroll 2 Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On a :

1) $P(f)$ et $Q(f)$ commutent.

$f \in \mathcal{L}(E)$.

Justifier que :

$\mathrm{Im}(f-3I)$ stable par (f^2+f)

10:48 lun. 14 oct.

Cours Réduction

1) i) $(\alpha P+\beta Q)(f) = \alpha P(f) + \beta Q(f)$

ii) $(\alpha P+\beta Q)(A) = \alpha P(A) + \beta Q(A)$

2) i) $(P\cdot Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$

ii) $(P\cdot Q)(A) = P(A) \times Q(A)$

Coroll 2 Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On a :

1) $P(f)$ et $Q(f)$ Commutent.

$f \in \mathcal{L}(E)$.

Justifier que :

$\mathrm{Im}(f - 3I)$ stable par $(f^2 + f)$

Rappel : Si $f\circ g = g\circ f$ alors

$\mathrm{Im}(g)$ et $\ker(g)$ sont stables par f

solution : $(f - 3I)$ et $(f^2 + f)$ commutent

D'où . . . — — — —

$f \in \mathcal{L}(E)$

1) L'application $P \longmapsto P(f)$ est un morphisme de l'algèbre $(\mathbb{K}[X], +, \cdot, \times)$ vers l'algèbre $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$.

$f \in \mathcal{L}(E)$.

$$\phi : \mathbb{K}(X) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$
$$P \longmapsto \phi(P) = P(f)$$

$\phi(P) = P(f)$

1) $\phi(1) \overset{?}{=} I_E$

si $P(X) = 1$, $P(f) = I_E$

$\Rightarrow \boxed{\phi(1) = I_E}$

2) $\phi(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(f) = \lambda P(f) + Q(f)$

$= \lambda \phi(P) + \phi(Q)$

3) $\phi(P \times Q) = (P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$

$= \phi(P) \circ \phi(Q)$

2) L'application $P \mapsto P(A)$ est un morphisme de l'algèbre $(\mathbb{K}[X],+,\cdot,\times)$ vers l'algèbre $(M_n(\mathbb{K}),+,\cdot,\times)$.

NB 1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Notons $\phi : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$; $P \mapsto P(f)$ le morph d'algèbres ci-dessus.

1) $\ker(\phi) = \{P \in \mathbb{K}[X] \,/\, P(f)=0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Il s'appelle l'idéal annulateur de f.

$f \in \mathcal{L}(E)$.

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ P &\longmapsto \phi(P) = P(f) \end{aligned}$$

ϕ morph d'algèbres

$\ker(\phi)$ est un idéal de l'algèbre $\mathbb{K}[X]$.

$$\begin{aligned} \ker(\phi) &= \{P \in \mathbb{K}[X] \,/\, \phi(P) = 0_{\mathcal{L}(E)}\} \\ &= \{P \in \mathbb{K}[X] \,/\, P(f) = 0\} \end{aligned}$$

$\ker(\phi)$ est l'idéal annulateur de f.