$\rightarrow A \in \Theta(n) \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} {}^tA \cdot A = I_n$

$\rightarrow A \in S\Theta(n) \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} A \in \Theta(n) \\ \det(A) = +1 \end{cases}$

$\rightarrow S\Theta(n)$ se note aussi $\Theta^+(n)$

$\rightarrow$ Prop : $\boxed{A \in \Theta(n) \Rightarrow \det(A) = \pm 1}$

Demo (à savoir faire)

supp $A \in \Theta(n)$, alors ${}^tA \cdot A = I_n$

$\Rightarrow \det({}^tA \cdot A) = \underbrace{\det(I_n)}_{1}$

$\Rightarrow \det({}^tA) \cdot \det(A) = 1$ || $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

$\Rightarrow (\det(A))^2 = 1$ || $\det({}^tM) = \det(M)$

$\Rightarrow \det(A) = \pm 1$ $\square$

(à savoir faire)

Exo :

M. que $O^{+}(n)$ est un s-groupe de $(O(n), \times)$

Sol :

1) $I_n \in O^{+}(n)$ car $I_n \in O(n)$ et $\det(I_n) = 1$

2) Soient $A, B \in O^{+}(n)$. M. que $A.B^{-1} \in O^{+}(n)$.

On a $A.B^{-1} \in O(n)$ car $O(n)$ groupe.

$\det(A.B^{-1}) = \det(A) . \det(B^{-1})$

$= \overbrace{\det(A)}^{=1} . (\overbrace{\det(B)}^{=1})^{-1}$

$\| \det(M^{-1}) = (\det(M))^{-1} = \frac{1}{\det(M)}$

$= 1$

D'où la C/C.

à mortmer

Prop : L'intersection d'une famille de ssgr est un ssgr :
Si tous les F_i sont des ssgr de G, alors $\bigcap F_i$ l'est auusi.

Rappel

$$x \in \bigcap_{i \in I} F_i \iff (\forall i \in I, \quad x \in F_i)$$

Scanned with CamScanner

Prop : $<A>$ est le plus petit sous-groupe de G contenant A.

Veut dire que :

$$\begin{cases} 1)\ \langle A\rangle \text{ est un sous-gr de } G \text{ et } \underbrace{A \subset \langle A\rangle}_{\text{contenant } A} \\ 2)\ \text{Si } F \text{ est un s-groupe de } G \text{ contenant } A \\ \quad \text{Alors } \langle A\rangle \subset F \end{cases}$$

$$(A \cap B) \subset A \text{ et } (A \cap B) \subset B$$

$$\forall i_0 \in I, \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \subset A_{i_0}$$

Si $G=\langle A\rangle$, A est dite *partie génératrice* de G. On dit aussi que G est *engendré* par A.

– Ainsi A *est une partie génératrice du groupe* $\langle A\rangle$

E esp. vect.

1) Si $E = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ alors $(x_1, \dots, x_p)$ f^{lle} génératrice de E.

2) $(U_1, \dots, U_n)$ f^{lle} génératrice de $\mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_n)$

Épingler Copier

Soit A une partie d'un groupe (G,.).
Si *tout élément de G s'écrit comme produit d'éléments de A* alors
A est une partie génératice de G ; càd que G est engendré par A.
Par exemple :

S_n est engendré par [redacted]

Épingler Copier

Soit A une partie d'un groupe (G,.).

Si *tout élément de G s'écrit comme produit d'éléments de A alors A est une partie génératice de G ; càd que G est engendré par A.*

Par exemple :

a) S_n est engendré par les cycles.

b) S_n est engendré par les transpositions.

Rappel :

i) Toute permutation de S_n s'écrit comme produit de cycles (resp.transposition

E $\mathbb{K}$-ev vect et $a \in E$.

$$\underbrace{\boxed{\mathrm{vect}(a) = \{k.a \,/\, k \in \mathbb{K}\}}}_{\text{le sev de } E \text{ engendré par } a}$$

Pareil à :

$(G, +)$ groupe et $a \in G$.

$\langle \{a\} \rangle$ Noté $\boxed{\langle a \rangle = \{k \cdot a \,/\, k \in \mathbb{Z}\}}$

Si $(G, \cdot)$ groupe et $a \in G$.

$$\langle a \rangle = \{a^k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$$

que le noyau et l'image sont des sev.

Exemples de sous-groupes issus de noyaux :

On les tire des exemples ci-dessus de morphismes de groupes. Justifiez pourquoi.

1) $\mathbb{U}_n$, l'ensemble des racines n^{mes} de l'unité.

To Solve

2) $\mathbb{U}$, l'ensemble des complexes de module 1.

3) L'ensemble des matrices orthogonales positives.

4) L'ensemble des isométries directes d'un espace euclidien.

Autre exemple :

Considérons le morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$ défini par $exp : z \mapsto e^z$. Montrer que

To Solve

$$Im(exp) = \mathbb{C}^* \text{ et } ker(exp) = 2\pi i\mathbb{Z}$$

7) **Groupes monogènes. Groupes cycliques**

Déf :

i) Un groupe G est dit *monogène* s'il existe un élément a∈G tel que G=<a>.
a est dit dans ce cas *un générateur* de G.

ii) Un groupe monogène fini est dit groupe *cyclique*.

Exemples :

i) $(\mathbb{U}_n, \times)$ est cyclique et $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ en est un générateur.

ii) $(\mathbb{Z}, +)$ est monogène et 1 en est un générateur.

iii) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est cyclique et $\overline{1}$ en est un générateur.

$\boxed{\text{To Solve}}$

$S_i\ (G, \cdot): \langle a \rangle = \{a^k / k \in \mathbb{Z}\}$

$S_i\ (G, +): \langle a \rangle = \{ka / k \in \mathbb{Z}\}$

---

i) $\mathbb{U}_n = \{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} / k \in \mathbb{Z} \}$

$= \{ (e^{\frac{2\pi i}{n}})^k / k \in \mathbb{Z} \}$

$= \langle e^{\frac{2\pi i}{n}} \rangle$

Đ/si . . . .

Scanned with CamScanner

Ch 1 Structures algébriques usuelles

Groupes monogènes. Groupes cycliques

Déf :

i) Un groupe G est dit *monogène* s'il existe un élément $a \in G$ tel que $G = \langle a \rangle$.
a est dit dans ce cas *un générateur* de G.

ii) Un groupe monogène fini est dit groupe *cyclique.*

Exemples :

i) $(\mathbb{U}_n, \times)$ est cyclique et $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ en est un générateur

ii) $(\mathbb{Z}, +)$ est monogène et 1 en est un générateur.

iii) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est cyclique et $\overline{1}$ en est un générateur.

To Solv

Si $(G, \cdot)$: $\langle a \rangle = \{a^k / k \in \mathbb{Z}\}$

Si $(G, +)$: $\langle a \rangle = \{ka / k \in \mathbb{Z}\}$

i) $\mathbb{Z} = \{k / k \in \mathbb{Z}\}$
$= \{k \cdot 1 / k \in \mathbb{Z}\}$
$= \langle 1 \rangle$

Doù $\mathbb{Z}$ monogène engendré par 1.

Groupes monogènes. Groupes cycliques

Déf :

i) Un groupe G est dit *monogène* s'il existe un élément $a \in G$ tel que $G = \langle a \rangle$.
a est dit dans ce cas *un générateur* de G.

ii) Un groupe monogène fini est dit groupe *cyclique*.

Exemples :

i) $(\mathbb{U}_n, \times)$ est cyclique et $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ en est un générateur.

ii) $(\mathbb{Z}, +)$ est monogène et 1 en est *un générateur*.

... $\overline{1}$ *en est un générateur.*

To Solv

Si $(G, \cdot) : \langle a \rangle = \{a^k / k \in \mathbb{Z}\}$

Si $(G, +) : \langle a \rangle = \{k.a / k \in \mathbb{Z}\}$

i) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{k} / k \in \mathbb{Z}\}$

$= \{k.\overline{1} / k \in \mathbb{Z}\}$

$= \langle \overline{1} \rangle$

D'où $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ monogène engendré par $\overline{1}$.

Étant fini, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est donc cyclique

Épingler Copier

i) Un groupe G est dit *monogène* s'il existe un élément $a \in G$ tel que $G = <a>$.
a est dit dans ce cas *un générateur* de G.

ii) Un groupe monogène fini est dit groupe *cyclique.*

Tout groupe monogène est commutatif.

Épingler Copier

i) Un groupe G est dit *monogène* s'il existe un élément $a\in G$ tel que $G=\langle a\rangle$.
a est dit dans ce cas *un générateur* de G.

ii) Un groupe monogène fini est dit groupe cyclique.

Tout groupe monogène est commutatif.

Démo

$(G,\cdot)$

Supp $G=\langle a\rangle$. (ie monogène)

M.q. G est abelien.

On a $G=\{a^k / k\in\mathbb{Z}\}$.

Soient $x,y\in G$. M.q. $xy=yx$

Alors $\left(\exists k,k'\in\mathbb{Z},\ \begin{cases} x=a^k \\ y=a^{k'} \end{cases}\right)$

$$\Rightarrow xy = a^k\cdot a^{k'} = a^{k+k'} = a^{k'}\cdot a^k = yx$$

$\square$

NB : Tout groupe monogène est commutatif. La réciproque est en général fausse :

Contre-exemple : $(\mathbb{C}, +)$ est commutatif mais non monogène (*Démo par l'absurde*)

À faire

Clé à retenir : Soit H un sous-groupe de G. Soit $a \in G$. On a

$$< a > \subset H \Leftrightarrow a \in H$$

Démo

$(\Rightarrow)$

Supp $\langle a \rangle \subset H$ dmq $a \in H$

On a $a \in \langle a \rangle$ $(a = a^1)$

et $\langle a \rangle \subset H$

D'où $a \in H$

$(\Leftarrow)$

$a \in H \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{Z}, a^k \in H)$ (car H s-gr)

D'où $\langle a \rangle \subset H$

$\square$

Épingler Copier

Clé à retenir : Soit H un sous-groupe de G. Soit $a \in G$. On a

$$< a > \subset H \Leftrightarrow a \in H$$

Analogue à :

E $\mathbb{K}$-esp vect.
H sev de E et $a \in E$.
On a :

$$a \in H \Longleftrightarrow \text{Vect}(a) \subset H$$

$$\text{Vect}(a) = \{\lambda . a \,/\, \lambda \in \mathbb{K}\}$$ à retenir

Épingler Copier

Prop : $\overline{m}$ est générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \Leftrightarrow m \wedge n = 1$

Les générateurs de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sont :

$\overline{1}, \overline{5}$