Correction

Problème

Partie A

A.1. Remarquons que les matrices I, A et A^2 commutent. Si $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\begin{aligned} E(s)E(t) &= \left(I + sA + \frac{s^2}{2}A^2\right)\left(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2\right) \\ &= I + (s+t)A + \left(\frac{s^2}{2} + \frac{t^2}{2} + st\right)A^2 \\ &= E(s+t). \end{aligned}$$

(les termes en A^3, $A^4, \ldots$ n'interviennent pas car $A^3 = 0$).

A.2. Il s'agit simplement de faire une récurrence à partir du résultat précédent.

A.3. Remarquons que $E(0) = I$. En appliquant **A.1.** avec $s = -t$, on obtient :

$$E(t)E(-t) = E(0) = I,$$

donc $E(t)$ est inversible d'inverse $E(-t)$.

A.4. Si $\alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 = 0$, on multiplie par A^2 : $\alpha_0 A^2 = 0$, et on trouve $\alpha_0 = 0$. De même, en multipliant par A, on trouve $\alpha_1 = 0$, puis $\alpha_2 = 0$: la famille $(I,\, A,\, A^2)$ est libre.

A.5. Attention! Cette application n'est pas une application linéaire, et il ne suffit pas de calculer son noyau.

$$\begin{aligned} E(s) = E(t) &\iff (t-s)A + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{s^2}{2}\right)A^2 = 0 \\ &\iff t = s \end{aligned}$$

(la dernière équivalence venant du fait que (I,A,A^2) est libre. L'application $t \mapsto E(t)$ est donc injective.

A.6. Nous avons $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit donc :

$$E(t) = \begin{pmatrix} 0 & t & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie B

B.1. On calcule $Ker(f - 2Id_{\mathbb{R}^2})$:

$$\begin{aligned} (x,y) \in Ker(f - 2Id_{\mathbb{R}^2}) &\iff \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 6y &=& 0 \\ x - 3y &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 3y \\ y &=& y \end{array} \right. \end{aligned}$$

On pose $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $F = vect(\vec{u})$. On calcule aussi $Ker(f - Id_{\mathbb{R}^2})$:

$$\begin{array}{rcl}(x,y)\in Ker(f-Id_{\mathbb{R}^2}) & \iff & \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0 \\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcl} 3x-6y & = & 0 \\ x-2y & = & 0 \end{array}\right. \\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2y \\ y & = & y \end{array}\right.\end{array}$$

On pose $\vec{v}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $G=vect(\vec{v})$. F et G sont donc deux droites vectorielles, dont les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires. Elles sont donc supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$ (qui est de dimension 2).

B.2. Comme $f(\vec{u})=2\vec{u}$ et $f(\vec{v})=\vec{v}$, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

B.3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $(\vec{u},\vec{v})$, et D la matrice de f dans $\mathcal{B}$ (la matrice diagonale de la question précédente). Alors les formules de changement de base donnent :

$$A=PDP^{-1}.$$

La matrice P est constituée de la façon suivante : les colonnes sont les coordonnées des nouveaux vecteurs dans les anciens. On a donc :

$$P=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de P est 1, et on obtient :

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

B.4. Calculer la puissance n-ième d'une matrice est très facile... Il suffit de mettre les coefficients sur la diagonale à la puissance n. On obtient donc :

$$D^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On prouve que $A^n=PD^nP^{-1}$ par récurrence sur n. En effet, cette formule est vraie pour $n=1$, et si elle est valide au rang n, alors $A^{n+1}=PDP^{-1}PD^nP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} A^n & = & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & -2^{n+1} \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 3.2^n-2 & -3.2^{n+1}+6 \\ 2^n-1 & -2^{n+1}+3 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Partie C

C.1 D'après la formule de A^n exhibée en **B.4.** :

$$\begin{array}{rclcrcl} a_n(t) & = & 3\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}2^k-2\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!} & & c_n(t) & = & \sum_{k=0}^{n}\frac{2^kt^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!} \\ b_n(t) & = & -6\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k2^k}{k!}+6\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!} & & d_n(t) & = & -2\sum_{k=0}^{n}\frac{2^kt^k}{k!}+3\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}. \end{array}$$

C.2. On fait tendre n vers $+\infty$ dans les équations précédentes, en ayant remarqué que

$$e^{2t} = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k t^k}{k!} \right),$$

et on obtient :

$$\begin{array}{rcl} a(t) & = & 3e^{2t} - 2e^t \\ b(t) & = & -6e^{2t} + 6e^t \\ c(t) & = & e^{2t} - e^t \\ d(t) & = & -2e^{2t} + 3e^t. \end{array}$$

C.3. Nous avons :

$$E(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2e^t & -6e^{2t} + 6e^t \\ e^{2t} - e^t & -2e^{2t} + 3e^t \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

C.4 Un petit calcul matriciel montre d'une part que $Q^2 = Q$ et $R^2 = R$, et d'autre part que $QR = RQ = 0$. Les endomorphismes q et r sont donc des projections, et l'image de r est inclus dans le noyau de q (et réciproquement). En outre, l'image de q est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$. Comme ces deux vecteurs sont colinéaires, c'est encore la droite vectorielle engendrée par un seul des deux, et on retrouve F. De même, pour l'image de R, on trouve G : q est la projection sur F parallèlement à G, et r est la projection sur G parallèlement à F.

C.5. On a :

$$\begin{array}{rcl} E(s)E(t) & = & (e^{2s}Q + e^s R)(e^{2t}Q + e^t R) \\ & = & e^{2(s+t)}Q^2 + e^{2s+t}QR + e^{s+2t}RQ + e^{s+t}R^2 \\ & = & e^{2(s+t)}Q^2 + e^{s+t}R^2 \\ & = & E(s+t). \end{array}$$

Par une récurrence sur n, $(E(t))^n = E(nt)$, et de même qu'on l'a déjà prouvé en partie **A**, $(E(t))^{-1} = E(-t)$ (il faut au préalable remarquer que $Q + R = I$).
Montrons que (Q,R) est libre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En effet, si $\alpha Q + \beta R = 0$, on compose par Q et on obtient $\alpha Q = 0 \implies Q = 0$.
De ce fait, si $E(t) = E(s)$, on a nécessairement $e^{2s} = e^{2t}$ et $e^s = e^t$, et par conséquent $s = t$. L'application $t \mapsto E(t)$ est injective.

Fin & bon courage !