Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 1

Notons $f_n(x) = x^n(1-\sqrt{x})$, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \ [0,+\infty[$.

1) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx$$

2) En déduire la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}$$

Exercice 2

Soit $\alpha > 0$. Montrer que

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^\alpha}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\alpha+1}$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$

Exercice 3

Considérons la fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt$$

1) Montrer que f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et exprimer $f'(x)$.

2) Calculer $f(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = f(x^2)$.
Montrer que

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

4) Déduire que ce qui précède l'intégrale de *Gauss*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 4

Considérons la fonction $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \, \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$$

1) Montrer que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$
2) Montrer que F est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $F''(x)$.
3) En déduire la valeur de $F(0)$ puis celle de l'intégrale de *Dirichlet* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Exercice 5

Considérons les fonctions f et g définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \, dt \text{ et } g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} \, dt$$

1) Montrer que f et $g \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[, \mathbb{R})$, et qu'elles vérifient l'équation différentielle
$$y'' + y = \frac{1}{x}$$
2) Montrer que f et g sont continues en 0.
3) En déduire la valeur de l'intégrale de *Dirichlet* :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 6 (Fonction gamma)

Considérons la fonction Γ définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$$

1) Montrer que Γ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.
3) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$ est convexe.
   Indice : Vous pouvez utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 7 (Fonction gamma)

Considérons la fonction Γ définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$$

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction Γ.
2) Calculer l'intégrale
$$\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \, dt$$
3) i) Justifier que
$$\forall t>0,\ \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$$
ii) Montrer enfin que
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = \Gamma(x)$$