Dérivation dans un anneau

Les parties I et II sont totalement indépendantes.

Soit $(A,+,\times)$ un anneau (qui n'est pas a priori supposé commutatif)

On note 0 et 1 les éléments neutres additif et multiplicatif de A.

Une application $\delta : A \to A$ est appelée dérivation sur A si et seulement si, pour tout $x,y \in A$ on a les relations :

(1) $\delta(x+y)=\delta(x)+\delta(y)$

(2) $\delta(xy)=x\delta(y)+\delta(x)y$

Partie I – Crochet de Lie et exemple de dérivation

Pour $a,b \in A$, on pose $[a,b]=ab-ba$.

1. Que vaut $[a,b]$ lorsque a et b commutent ?

2. On revient au cas général et on se donne a,b,c dans A.

2.a Former une relation liant $[a,b]$ et $[b,a]$.

2.b Etablir que $[a,b+c]=[a,b]+[a,c]$.

2.c Justifier $[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0$.
Cette dernière relation est connue sous le non d'identité de Jacobi.

3. Pour $a \in A$, on considère $d_a : A \to A$ l'application définie par $d_a(x)=ax-xa$.
Montrer que d_a est une dérivation sur A.

Partie II – Propriétés des dérivations

Soit δ une dérivation quelconque sur A.

1. En exploitant les relations (1) et (2) calculer $\delta(0)$ et $\delta(1)$.

2. Soit x un élément de l'anneau $(A,+,\times)$.

2.a Exprimer $\delta(-x)$ en fonction de $\delta(x)$.

2.b On suppose que x est inversible.
Exprimer $\delta(x^{-1})$ en fonction de $\delta(x)$ et de x^{-1}.

3. On se donne $n \in \mathbb{N}^*$.

3.a Soit $x_1,x_2,\ldots,x_n$ une liste d'éléments de A.
Exprimer $\delta(x_1x_2...x_n)$ en fonction des x_k et des $\delta(x_k)$.

3.b Soit $x \in A$. Exprimer $\delta(x^n)$.
Que devient cette formule si x et $\delta(x)$ commutent ?

4. Soit $C_\delta=\{x \in A / \delta(x)=0\}$.

4.a Montrer que C_δ est un sous-anneau de $(A,+,\times)$.

4.b Montrer que, si $(A,+,\times)$ est un corps, alors C_δ est un sous-corps de $(A,+,\times)$.

Partie III – Manipulation de dérivations

1. Dans cette question δ_1,δ_2 désignent deux dérivations sur A.

1.a Pensez-vous que l'application $\delta_1+\delta_2$ est une dérivation ?

1.b Pensez-vous que l'application $\delta_1 \circ \delta_2$ est une dérivation ?

1.c On note $[\delta_1,\delta_2]=\delta_1\circ\delta_2-\delta_2\circ\delta_1$

Montrer que $[\delta_1,\delta_2]$ est une dérivation sur A .

2. Soit δ une dérivation sur A et a,b deux éléments de A .

2.a Montrer que $[\delta,d_a]=d_{\delta(a)}$.

2.b Montrer que $[d_a,d_b]=d_{[a,b]}$.