Extrait

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}^k_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ désigne le $\mathbb{C}-$espace vectoriel des fonctions complexes $2\pi-$périodiques et de classe k sur $\mathbb{R}$.

Si $f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on pose

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, \mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2.1. Quelques propriétés des coefficients de Fourier

2.1.1. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, la famille $\big(c_n(f)\big)_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée.

2.1.2. Montrer que, pour tout $f \in \mathscr{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = in\, c_n(f)$.

2.1.3. En déduire que, pour tout $f \in \mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f'') = -n^2\, c_n(f)$.

Soit $f \in \mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

2.2.1. Montrer que la famille $\big(c_n(f)\big)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable.

Fin