**Définitions et notations :** Dans tout ce problème, $E$ est un $\mathbb{K}-ev$ de dimension $n \geq 1$. L'application identité de $E$ sera notée $Id$, l'ensemble des endomorphismes de $E$ est noté $\mathcal{L}(E)$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'espace vetoriel des matrices carrées de taille $n$. La trace d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, est la somme des coefficients diagonaux de $A$.On la note $Tr(A)$.

Pour tout endomorphisme $f$ de $E$, on notera $f^0 = Id$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{k+1} = f^k \circ f = f \circ f^k$. On notera aussi $Ker(f)$ le noyau de $f$, $Im(f)$ l'image de $f$.

Un sous espace $F$ de $E$ est dit stable par $f$ si pour tout $x \in E$, on a $f(x) \in F$ .

**Partie I : Préliminaire**

1. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) Vérifier que $Tr(AB) = Tr(BA)$.
   (b) Déduire que si $A$ et $B$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $Tr(A) = Tr(B)$.

   **Notons alors que pour tout endomorphisme $f$ de $E$, la trace d'une matrice $A$ de $f$ ne dépend pas de la base choisie; on définit ainsi la trace de $f$ par** $Tr(f) = Tr(A)$.
2. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$, tels que $g$ est bijectif, et $\alpha \in \mathbb{K}^*$. Montrer que l'égalité $f + \alpha g = g^{-1} \circ f \circ g$ est impossible. (On pourra utiliser la trace).
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Vérifier que $Ker(u^k) \subset Ker(u^{k+1})$.
   (b) Montrer que si $Ker(u^k) = Ker(u^{k+1})$ alors $Ker(u^k) = Ker(u^{k+p})$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   (c) Déduire que si $Ker(u^{k+1}) \neq Ker(u^{k+2})$ alors $Ker(u^k) \neq Ker(u^{k+1})$.
   (d) Montrer que si $Ker(u^k) \neq Ker(u^{k+1})$ alors $dim(Ker(u^{k+1})) \geq k+1$.
   (e) Déduire que $Ker(u^n) = Ker(u^{n+1})$ et que $E = Ker(u^n) \oplus Im(u^n)$.

**Dans la suite du problème, on dit qu'un couple $(u, v)$ d'endomorphismes de $E$ vérifie la propriété $(P)$ si : $u \circ v - v \circ u = u$.**

**Partie II : Étude d'un exemple**

Dans cette partie $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $E$, et $u$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice canoniquement associée est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer (en justifiant!) le rang de $u$ et une base de chacun des sous espaces $Im(u)$ et $Ker(u)$.
2. Calculer $A^k$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), u^2(e_1))$ est une base de $E$. Donner la matrice de $u$ dans cette base.
4. Soit $v$ un endomorphisme de $E$.
   (a) Justifier l'existence de trois réels $a_0, a_1, a_2$ tels que $v(e_1) = a_0 e_1 + a_1 u(e_1) + a_2 u^2(e_1)$.
   (b) Montrer que le couple $(u, v)$ vérifie la propriété $(P)$ si, et seulement si, la matrice de $v$ dans $\mathcal{B}$ est :
   $$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 - 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 - 2 \end{pmatrix}$$
   (c) Soit $v_0$ l'endomorphisme dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $D = diag(0, -1, -2)$.
   Vérifier que le couple $(u, v_0)$ vérifie la propriété $(P)$.
   (d) Montrer que $(u, v)$ vérifie la propriété $(P)$ si, et seulement si, $v - v_0 \in Vect(Id, u, u^2)$.

**Partie III : Cas général**

Notons $C_u = \{v \in \mathcal{L}(E) \ / \ u \circ v = v \circ u\}$ et $P_u = \{v \in \mathcal{L}(E) \ / \ (u, v) \text{vérifie la propriété} (P)\}$.
On suppose désormais que $P_u$ est non vide.

1. Soit $v \in P_u$.
   (a) Montrer que $u$ n'est pas bijectif et que sa trace est nulle.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel $k$, on a : $u^k \circ v - v \circ u^k = k u^k$

   **On admet que $u^n = 0$ et on suppose dans toute la suite que $dim(Ker(u)) = 1$.**

2. Montrer que pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$ $dim(Ker(u^k)) = k$.
   (Indication : Penser à la restriction de $u$ sur $Im(u^k)$)

3. Justifier l'existence d'un vecteur $e \notin Ker(u^{n-1})$, et montrer que $\mathcal{B}_e = (e, u(e), \cdots, u^{n-1}(e))$ est une base de $E$. Donner la matrice de $u$ dans $\mathcal{B}_e$

4. Soit $w$ un endomorphisme de $E$ dont la matrice dans $\mathcal{B}_e$ est de la forme $D = diag(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1})$.
   Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $w \in P_u$.
   Soit $w_0$ celui des endomorphismes ci dessus relatif à la condition $\alpha_0 = 0$.

5. On suppose maintenant que $w \in C_u$.
   (a) Vérifier que $Im(w)$ et $Ker(w)$ sont stables par $u$.
   (b) Montrer que $w \in C_{u^k}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (c) Justifier qu'il existe $n$ scalaires $a_0, \cdots, a_{n-1}$ tels que $w(e) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(e)$.
   Déterminer alors les images par $w$ des éléments de la base $\mathcal{B}_e$.
   (d) En déduire que $C_u = Vect(Id, u, \cdots, u^{n-1})$.
   (e) Décrire les éléments de $P_u$ en fonction de $w_0$ et des éléments de $C_u$.

## Partie I

1) a) $tr(AB) = tr(BA)$ (très classique)

b) Aussi, classique

2) Supposons que l'on a :

$$f + \alpha g = g^{-1} \circ f \circ g$$

Alors $f \circ g^{-1} + \alpha I_E = g^{-1} \circ f$

$\Rightarrow tr(f \circ g^{-1} + \alpha I_E) = tr(g^{-1} \circ f)$

$\Rightarrow \underbrace{tr(f \circ g^{-1})}_{= tr(g^{-1} \circ f)} + \alpha \underbrace{tr(I_E)}_{= n} = tr(g^{-1} \circ f)$

$\Rightarrow \alpha n = 0$, càd $\alpha = 0$ (car $n \geq 1$)

ce qui est absurde

3) a) OK ; $(U^k(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{U(U^k(x))}_{= U^{k+1}(x)} = 0$

b) Supp. que $Ker(U^k) = Ker(U^{k+1})$.

M. que $(\forall p \in \mathbb{N}, Ker(U^k) = Ker(U^{k+p}))$

Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Pour $p = 0$ : (OK)

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$.

Supp. que $Ker(U^k) = Ker(U^{k+p})$.

M. que $Ker(U^k) = Ker(U^{k+p+1})$ :

(Par double inclusion)

i) $Ker(U^k) \subset Ker(U^{k+p+1})$ ?

$U^k(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{U^{p+1}(U^k(x))}_{= U^{k+p+1}(x)} = 0$

ii) $\boxed{U^{k+p+1}(x) = 0} \Rightarrow U^{k+1}(U^p(x)) = 0$

$\Rightarrow U^p(x) \in Ker(U^{k+1}) = Ker(U^k)$

$\Rightarrow U^p(x) \in Ker(U^k)$

$\Rightarrow U^{k+p}(x) = 0$

$\Rightarrow x \in Ker(U^{k+p}) \xrightarrow{HR} Ker(U^k)$

$\Rightarrow x \in Ker(U^k)$

$\Rightarrow U^k(x) = 0$ CQFD

c) M. que $(Ker(U^{k+1}) \neq Ker(U^{k+2})) \Rightarrow Ker(U^k) \neq Ker(U^{k+1})$

Par contraposée :

$Ker(U^k) = Ker(U^{k+1}) \overset{b)}{\Rightarrow} \forall p \in \mathbb{N}, Ker(U^k) = Ker(U^{k+p})$

$\Rightarrow Ker(U^k) = Ker(U^{k+2})$

or $Ker(U^k) = Ker(U^{k+1})$

alors $Ker(U^{k+1}) = Ker(U^{k+2})$

d) Démonstration par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ : (Méth 1)

Initialisation : (Pour $k = 0$)

Supp. que $Ker(U^0) \neq Ker(U^1)$. M. que $\dim(Ker U) \geq 1$

On a $Ker(U^0) = Ker(I_E) = \{0\} \subsetneq Ker(U)$

$\Rightarrow \dim Ker(U) > \dim\{0\} = 0$

$\Rightarrow \dim Ker(U) \geq 1$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$.

Supposons que (si $Ker(U^k) \neq Ker(U^{k+1})$ alors $\dim Ker(U^{k+1}) \geq k+1$)

M. que (si $Ker(U^{k+1}) \neq Ker(U^{k+2})$ alors $\dim Ker(U^{k+2}) \geq k+2$)

Supp $Ker(U^{k+1}) \neq Ker(U^{k+2})$

$\xrightarrow{c)} Ker(U^k) \neq Ker(U^{k+1})$

$\xrightarrow{HR} \dim(Ker(U^{k+1})) \geq k+1$

D'autre part, on a $Ker(U^{k+1}) \subsetneq Ker(U^{k+2})$

$\Rightarrow \dim(Ker(U^{k+2})) > \dim(Ker(U^{k+1})) \geq k+1$

$\Rightarrow \dim(Ker(U^{k+2})) > k+1$

$\Rightarrow \dim(Ker(U^{k+2})) \geq k+2$

Méthode : (Démonstration directe)

Supp $Ker(U^k) \neq Ker(U^{k+1})$ alors

$Ker(U^{k+1}) \supsetneq Ker(U^k) \supsetneq \cdots \supsetneq Ker(U^0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ker(U^0) \subsetneq Ker(U) \\ Ker(U) \subsetneq Ker(U^2) \\ \vdots \\ Ker(U^k) \subsetneq Ker(U^{k+1}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dim(Ker(U^0)) < \dim(Ker(U)) \\ \dim(Ker(U)) < \dim Ker(U^2) \\ \quad \dots \\ \dim(Ker(U^k)) < \dim Ker(U^{k+1}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dim(Ker(U^0)) + 1 \leq \dim Ker(U) \\ \dim(Ker U) + 1 \leq \dim Ker(U^2) \\ \quad \dots \\ \dim Ker(U^k) + 1 \leq \dim Ker(U^{k+1}) \end{cases}$$

Par sommation et simplifications, on aura :

$$\underbrace{\dim(Ker(U^0))}_{=\dim(\{0\})=0} + (k+1) \leq \dim(Ker(U^{k+1}))$$

$$\Rightarrow \dim(Ker(U^{k+1})) \geq k+1$$

**e) i)** $Ker(U^n) = Ker(U^{n+1})$ ; En effet :

Supp le contraire : $Ker(U^n) \neq Ker(U^{n+1})$

(d) $\Rightarrow \dim(Ker(U^{n+1})) \geq n+1 > \dim(E)$

Ce qui est absurde

**ii)** $E = Ker(U^n) \oplus Im(U^n)$ ; En effet :

**(A)** d'abord $\dim E = \dim Ker(U^n) + \dim(Im U^n)$

D'après le thm du rang.

**(B)** M. que $Ker(U^n) \cap Im(U^n) = \{0\}$ :

Soit $y \in Ker(U^n) \cap Im(U^n)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} U^n(y) = 0 \\ \exists x \in E,\ y = U^n(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow U^{n+n}(x) = 0$

$\Rightarrow x \in Ker(U^{n+n}) \underset{b^{\circ}/}{=} Ker(U^n)$

$\Rightarrow \underbrace{U^n(x)}_{=y} = 0$

$\Rightarrow y = 0$ ☒

Fin Partie (I)

## Partie II

**1) i)** $rg(U) = rg \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$

**ii)** $U(e_1)$ et $U(e_2)$ sont linéairement indépendants

car $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ le sont.

or $\dim(Im(U)) = 2$ alors la famille

$\boxed{(U(e_1), U(e_2)) \text{ est une base de } Im(U).}$

**iii)** $\dim Ker(U) = 1$ (thm du rang)

et $U(e_2) = U(e_3)$ donc $U(e_2 - e_3) = 0$

$\Rightarrow \boxed{(e_2 - e_3) \text{ base de } Ker(U)}$ ☒

N.B : Vous pouvez procéder comme suit :

$x = (x_1, x_2, x_3) \in Ker(U) \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \dots$

**2)** $A^0 = I_3$

$A^1 = A$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = 0$ ;

$\forall k \geq 3,\ A^k = 0$

**3) i)** $e_1 = (1, 0, 0)$

$U(e_1) = (-1, 0, 1)$

$U^2(e_1) = (0, -1, 1)$

$$\det_{B_0}(B) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

D'où $B$ base de $E$

**ii)**
$$mat_B(U) = \begin{array}{c|ccc} & U(e_1) & U(U(e_1)) & U(U^2(e_1)) \\ \hline e_1 & 0 & 0 & 0 \\ U(e_1) & 1 & 0 & 0 \\ U^2(e_1) & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

4) a) $v(e_1) \in E$ et $B$ base de $E$.

b) ($\Rightarrow$) Supp ($uv - vu = u$).

M.q $\underset{B}{mat}(v) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0-1 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0-2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{v(e_1) = a_0 e_1 + a_1 u(e_1) + a_2 u^2(e_1)} \quad (\alpha)$$

$$v(u(e_1)) = u(v(e_1)) - u(e_1) \quad (\text{car } uv - vu = u)$$
$$= u(a_0 e_1 + a_1 u(e_1) + a_2 u^2(e_1)) - u(e_1)$$
$$= a_0 u(e_1) + a_1 u^2(e_1) + a_2 \underbrace{u^3(e_1)}_{=0} - u(e_1)$$

$$\boxed{v(u(e_1)) = (a_0 - 1) u(e_1) + a_1 u^2(e_1)} \quad (\beta)$$

$$v(u^2(e_1)) = (vu)(u(e_1))$$
$$= (uv - u)(u(e_1))$$
$$= u(v u(e_1)) - u^2(e_1)$$
$$= u((a_0-1) u(e_1) + a_1 u^2(e_1)) - u^2(e_1)$$
$$= (a_0-1) u^2(e_1) + a_1 \underbrace{u^3(e_1)}_{=0} - u^2(e_1)$$
$$\Rightarrow \boxed{v(u^2(e_1)) = (a_0 - 2) u^2(e_1)} \quad (\gamma)$$

De $(\alpha)$, $(\beta)$ et $(\gamma)$, on tire que :

$$\boxed{\underset{B}{mat}(v) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0-1 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0-2 \end{pmatrix}}$$

($\Leftarrow$) Supp $\underset{B}{mat}(v) = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

et m.q ($uv - vu = u$)

Suffit de montrer que :

$$\underset{B}{mat}(u) \cdot \underset{B}{mat}(v) - \underset{B}{mat}(v) \cdot \underset{B}{mat}(u) = \underset{B}{mat}(u)$$

Et il suffit seulement de faire vos calculs ; $\underset{B}{mat}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$\underset{B}{mat}(v) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0-1 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0-2 \end{pmatrix}.$$

c) On a $\underset{B}{mat}(v_0) = diag(0, -1, -2)$

$\Rightarrow v_0(e_1) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} v_0(e_1) = \alpha_0 e_1 + \alpha_1 u(e_1) + \alpha_2 u^2(e_1) \\ \text{où } \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \end{cases}$

D'après 4)b), on a que $(u, v_0)$ vérifie la propriété (P) si et ssi :

$$\underset{B}{mat}(v_0) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0-1 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0-2 \end{pmatrix}$$

ce qui est vérifié, alors $(u, v_0)$ vérifie (P)

d) $(u,v)$ vérifie la propriété (P)

$\Leftrightarrow \underset{B}{mat}(v) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0-1 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0-2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \underset{B}{mat}(v - v_0) = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \underset{B}{mat}(v - v_0) = \begin{pmatrix} a_0 & & 0 \\ a_1 & a_0 & \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$

Et on a : $\underset{B}{mat}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; $\underset{B}{mat}(u^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D'où ;

$(u,v)$ vérifie la propriété (P)

$\Leftrightarrow \underset{B}{mat}(v - v_0) = \underset{B}{mat}(a_0 Id + a_1 u + a_2 u^2)$

$\Leftrightarrow v - v_0 = a_0 Id + a_1 u + a_2 u^2$

$\Rightarrow v - v_0 \in Vect(Id, u, u^2)$.

Réciproquement :

Supp $v - v_0 \in Vect(Id, u, u^2)$ et

(3) M.que $v - v_0 = a_0 Id + a_1 u + a_2 u^2$

On a $(v - v_0) \in \text{vect}(Id, u, u^2)$

$\Rightarrow \left(\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \,/\, v - v_0 = \alpha Id + \beta u + \gamma u^2\right)$

$\Rightarrow v(e_1) - \underbrace{v_0(e_1)}_{=0} = \alpha e_1 + \beta u(e_1) + \gamma u^2(e_1)$

$\Rightarrow v(e_1) = \alpha e_1 + \beta u(e_1) + \gamma u^2(e_1)$

Or $v(e_1) = a_0 e_1 + a_1 u(e_1) + a_2 u^2(e_1)$

et que $(e_1, u(e_1), u^2(e_1))$ base de $E$

alors $(a_0 = \alpha ;\ a_1 = \beta ;\ a_2 = \gamma)$.

D'où $\boxed{v - v_0 = a_0 Id + a_1 u + a_2 u^2}$

(Fin Partie II) CQFD

## Partie III.

1) a) i) $u$ non bijectif ; En effet :

Raisonnons par l'absurde, et supp que $u$ bijectif.

On a $uv - vu = u$

$\Rightarrow u v u^{-1} - v = Id$

$\Rightarrow \underbrace{tr(u v u^{-1})}_{= tr(v)} - tr(v) = \underbrace{tr(Id)}_{= n}$

$\Rightarrow n = 0$ ; ce qui est absurde

ii) $tr(u) = tr(uv - vu) = \underbrace{tr(uv)}_{= tr(vu)} - tr(vu) = 0$.

b) Récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. (simple)

2) M. que : $(\forall k \in \{0, \ldots, n\},\ \dim(\text{Ker}(u^k)) = k)$

Par récurrence sur $k \in \{0, \ldots, n\}$

Pour $k = 0$ : OK

Hérédité : Soit $0 \leq k \leq n-1$.

Supp. que $\dim \text{Ker}(u^k) = k$

M. que $\dim \text{Ker}(u^{k+1}) = k+1$

$\text{Im}(u^k)$ stable par $u$.

Notons $u_k$ l'endomorphisme induit par $u$ sur $\text{Im}(u^k)$.

On a $\begin{cases} u_k \in \mathcal{L}(\text{Im}(u^k)) \\ \forall x \in \text{Im}(u^k),\ u_k(x) = u(x) \end{cases}$

D'après le thm du rang, on a :

$\dim(\text{Im}(u^k)) = \dim(\text{Im}(u_k)) + \dim \text{Ker}(u_k)$

Et on a :

$\dim(\text{Im}(u^k)) = n - \overbrace{\dim \text{Ker}(u^k)}^{= k}$ (thm rang)

$\underline{\text{H Récurrence}}$ $n - k$.

$\dim \text{Im}(u_k) = \dim(\text{Im}(u^{k+1}))$

$= n - \dim(\text{Ker}(u^{k+1}))$ (thm rang)

D'où $\boxed{\dim \text{Ker}(u^{k+1}) = k + \dim \text{Ker}(u_k)}$

D'autre part, on a :

$x \in \text{Ker}(u_k) \iff x \in \text{Im}(u^k)$ et $u_k(x) = 0$

$\iff x \in \text{Im}(u^k)$ et $u(x) = 0$

$\iff x \in \text{Im}(u^k)$ et $x \in \text{Ker}(u)$

D'où $\text{Ker}(u_k) = \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u^k)$

$\Rightarrow \dim(\text{Ker}(u_k)) \leq \dim \text{Ker}(u) = 1$

Ainsi $\boxed{\dim \text{Ker}(u^{k+1}) \leq k+1}$ (α)

On a $\text{Ker}(u^k) \subset \text{Ker}(u^{k+1})$

Montrons que l'inclusion est stricte.

Supposons le contraire, alors $\text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^{k+1})$

$\Rightarrow \text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^n)$ (d'après Partie I ; 3)b))

$\Rightarrow \underbrace{\dim \text{Ker}(u^k)}_{= k} = \dim E = n$ (car $u^n = 0$)

$\Rightarrow k = n$ (ce qui contredit le fait que $k \leq n-1$)

d'où $\text{Ker}(u^k) \subsetneq \text{Ker}(u^{k+1})$

$\Rightarrow \underbrace{\dim Ker(U^k)}_{=k} < \dim Ker(U^{k+1})$

$\Rightarrow k < \dim Ker(U^{k+1})$

$\Rightarrow \boxed{k+1 \leq \dim Ker(U^{k+1})}$ ($\beta$)

($\alpha$) et ($\beta$) $\Rightarrow \boxed{\dim Ker(U^{k+1}) = k+1}$

(CQFD)

3°) i) $\dim Ker(U^{n-1}) = n-1 \Rightarrow Ker(U^{n-1}) \neq E$

$\Rightarrow \exists e \in E / e \notin Ker(U^{n-1})$

ii) On a $\begin{cases} U^n(e) = 0 \\ U^{n-1}(e) \neq 0 \end{cases}$.

$(e, U(e), \ldots, U^{n-1}(e))$ est une base de E.

(Très classique ; vue au TD : début de l'année)

iii) $\underset{B_e}{mat}(U) = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4) $W \in P_U \Leftrightarrow UW - WU = U$

$\Leftrightarrow \underset{B_e}{mat}(UW) - \underset{B_e}{mat}(WU) = \underset{B_e}{mat}(U)$

On trouve :

$\underset{B_e}{mat}(UW) = \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ \alpha_0 & \ddots & \\ 0 & \ddots & \alpha_{n-2} \; 0 \end{pmatrix}$

$\underset{B_e}{mat}(WU) = \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ \alpha_1 & \ddots & \\ 0 & \ddots & \alpha_{n-1} \; 0 \end{pmatrix}$

D'où :

$W \in P_U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ \alpha_0 - \alpha_1 & \ddots & \\ 0 & \ddots & \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} \; 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & \ddots & 1 \; 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_0 - \alpha_1 = 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 1 \\ \ldots \\ \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} = 1 \end{cases}$ càd $\Leftrightarrow$ $\forall\, 0 \leq k \leq n-1 ;$ $\alpha_k = \alpha_0 - k$

(terme général d'1 suite arithmétiq de raison $(-1)$)

5) a) OK

b) OK

c) i) OK ($B_e$ base de E et $W(e) \in E$)

ii) Soit $0 \leq i \leq n-1$.

$W(U^i(e)) = U^i(W(e))$ (car $W \in C_U$)

$= U^i\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k U^k(e)\right)$

$= \sum_{k=0}^{n-1} a_k U^{k+i}(e)$

d) $C_U \supset Vect(Id, U, \ldots, U^{n-1})$ ?

C'est clair, car $U^i$ commute avec $U$.

$C_U \subset Vect(Id, U, \ldots, U^{n-1})$ ?

Soit $W \in C_U$. M.que $W \in Vect(Id, \ldots, U^{n-1})$

Soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tq que $W(e) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k U^k(e)$

M.que : $W = \sum_{k=0}^{n-1} a_k U^k$, ce qui finira la question,

Il suffit de montrer que $W$ et $\sum_{k=0}^{n-1} a_k U^k$ coïncident sur la base $B_e$"

Soit alors $0 \leq i \leq n-1$. On a :

$W(U^i(e)) \overset{c/}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a_k U^{k+i}(e)$

$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k U^k\right)(U^i(e))$

CQFD

e) $v \in P_U \Leftrightarrow U \circ v - v \circ U = U$

$\Leftrightarrow Uv - vU = Uw_0 - w_0U$

(car $w_0 \in P_U$)

$\Leftrightarrow U(v - w_0) = (v - w_0)U$

$\Leftrightarrow (v - w_0) \in C_U$

cad :

$$P_U = \{w_0 + w \,/\, w \in C_U\} \overset{\text{noté}}{=} w_0 + C_U$$

Fin