Familles sommables

Exercice 1 :

1) Déterminer les réels α tels que la famille $\left(\frac{1}{(m+n)^{\alpha}}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ soit sommable.
2) Montrer que

$$\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^{\alpha}}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \textit{ sommable } \Leftrightarrow \left(\frac{1}{(m+n)^{2\alpha}}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \textit{ sommable}$$

3) En déduire les réels α pour lesquels la famille $\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^{\alpha}}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

Exercice 2 :

Soient $0 \preceq r \prec 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Montrer l'existence de la somme suivante et calculer sa valeur : $\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|}e^{im\theta}$

Exercice 3 :

Montrer l'existence de la somme suivante et calculer sa valeur :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}$$

Exercice 4 :

Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}^*$.
Déterminer la nature des séries suivantes :

1) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$
2) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{(\sigma(n))^2}$
3) $\sum\limits_{\substack{n\geq 1\\ n}} \frac{\sigma(n)}{n^2}$; ***Indice :*** *Considérer* $S_{2n}-S_n$ *, où* S_n *la somme partielle d'ordre* n
4) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n\sigma(n)}$; ***Indice :*** *Vous pouvez utiliser le résultat de 2)*

Exercice 5 :

Soit $n \geq 1$. Considérons les séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} v_n$ où $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
Montrer que les séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} v_n$ convergent, alors que leur série produit de Cauchy diverge.

Exercice 6 :

Montrer l'existence de la somme suivante et calculer sa valeur :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$$

Exercice 7 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille sommable.
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} 2^k u_k}{2^n}$.
Montrer que la famille $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, et déterminer sa somme en fonction de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 8 :

1) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.

   On rappelle que : $\forall n \in \mathbb{C},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

2) Montrer, via le produit de Cauchy de deux séries, que :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$$

3) Soit A une algèbre normée de dimension finie. Soient u et v deux éléments de A qui commuttent.
   Notons $S_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$

   a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ ||S_n(u)S_n(v) - S_n(u+v)|| \preceq S_n(||u||)S_n(||v||) - S_n(||u|| + ||v||)$$

   b) En déduire que :

$$e^{u+v} = e^u \times e^v$$