Fonctions Usuelles

Exercice 1 :

Simplifier les expressions suivantes :

1) $A = \left(e^{x^2}\right)^{\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}})}{x}}$; $B = x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}$; $C = \log_x(\log_x x^{x^y})$

2) $A = \arccos(\sin \frac{\pi}{3})$; $B = \arcsin(\sin \frac{174\pi}{7})$; $C = \arccos(\sin \frac{27\pi}{5})$;
$D = \arctan(\tan \frac{26\pi}{5})$

Exercice 2 :

Calculer les limites suivantes :
$L_1 = \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}}$; $L_2 = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$; $L_3 = \lim_{x\to 0} x^{\sqrt{x}}$; $L_4 = \lim_{x\to 0} x^{x^x}$;
$L_5 = \lim_{x\to 0}(x^x)^x$; $L_6 = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{x^x}}$; $L_7 = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{3^x}$

Exercice 3 :

1) Montrer que

$$\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q} = -\tan \frac{p-q}{2}$$

2) En déduire que $\tan \frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

Exercice 4 :

1) Simplifier pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(\tanh x) - \arctan(e^{2x})$

2) Simplifier :

   a) $argch(2x^2 - 1)$

   b) $argsh\left(2x\sqrt{1+x^2}\right)$

Exercice 5 :

Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Calculer $f'(x)$.

3) Que peut-on déduire ?

Exercice 6 :

Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) En posant $x = \tan t$, trouver une expression simplifiée de $f(x)$.

Exercice 7 :

Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) En posant $x = \sin t$, trouver une expression simplifiée de $f(x)$.

Exercice 8 :

1) Montrer que

$$\forall\, t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\},\ \frac{1-\cos t}{\sin t} = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$$

2) En déduire une simplification de $\arctan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 9 :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1) Montrer que si $a \neq 0$ alors

$$\sum_{k=0}^{n} \cosh(ka) = \frac{\cosh(\frac{na}{2}) \sinh\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sinh(\frac{a}{2})}$$

2) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cosh(a+kb)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sinh(a+kb)$

Exercice 10 :

Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

Exercice 11 :

Considérons la fonction f définie par : $f(x) = (x-2)e^x + (x+2)$.
Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \succeq 0$$

Exercice 12 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\left(\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}\right)^n = \frac{1+\tanh(nx)}{1-\tanh(nx)}$$

Exercice 13 :

1) Montrer que $\left(\forall p \in \mathbb{N},\ \arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)\right)$

2) En déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$; où $S_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$.

Exercice 1 :

Simplifier les expressions suivantes :

1) $A = \left(e^{x^2}\right)^{\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}})}{x}}$; $B = x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}$; $C = \log_x(\log_x x^{x^y})$

2) $A = \arccos(\sin\frac{\pi}{3})$; $B = \arcsin(\sin\frac{174\pi}{7})$; $C = \arccos(\sin\frac{27\pi}{5})$;
$D = \arctan(\tan\frac{26\pi}{5})$

1) $A = \left(e^{x^2}\right)^{\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}})}{x}} = \left(e^{x^2}\right)^{\frac{1}{x}\frac{\ln x}{x}} = e^{x^2 \times \frac{\ln x}{x^2}} = e^{\ln x} = x$

$B = x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}} = e^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \times \ln x} = e^{\ln(\ln x)} = \ln x$

$C = \log_x\left(\log_x\left(x^{x^y}\right)\right) = \log_x\left(x^y\right) = y$

Rappels $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$; $a^x = e^{x\ln a}$; $\log_a(a^x) = x$

2) $A = \arccos\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= \frac{\pi}{6}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\forall x \in [0, \pi],\ \arccos(\cos(x)) = x$

$B = \arcsin\left(\sin \frac{174\pi}{7}\right)$

$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin x) = x$

On a : $174 = 7 \times 24 + 6$

$\Rightarrow \frac{174}{7} = 24 + \frac{6}{7}$

$$\begin{array}{r|l} 174 & 7 \\ \hline 34 & 24 \\ 6 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} B = \arcsin\left(\sin \frac{174\pi}{7}\right) &= \arcsin\left(\sin\left(24\pi + \frac{6\pi}{7}\right)\right) \\ &= \arcsin\left(\sin \frac{6\pi}{7}\right) \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \sin(x + 2k\pi) = \sin x$

$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin x) = x$

Mais $\frac{6\pi}{7} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x = \sin(\pi - x)$

D'où

$$\begin{aligned} B &= \arcsin\left(\sin \frac{6\pi}{7}\right) \\ &= \arcsin\left(\sin\left(\pi - \frac{6\pi}{7}\right)\right) \\ &= \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{7}, \text{ car } \frac{\pi}{7} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \arccos\left(\sin\left(\frac{27\pi}{5}\right)\right) \\ &= \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{27\pi}{5}\right)\right) \\ &= \arccos\left(\cos\left(\frac{-49\pi}{10}\right)\right) \end{aligned}$$

$$= \arccos\left(\cos\left(\frac{49\pi}{10}\right)\right)$$

$$= \arccos\left(\cos\left(4\pi + \frac{9\pi}{10}\right)\right)$$

$$= \arccos\left(\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)\right)$$

$$= \frac{9\pi}{10}$$

car $\frac{9\pi}{10} \in [0, \pi]$

$49 = 10 \times 4 + 9$

$\frac{49}{10} = 4 + \frac{9}{10}$

$$D = \arctan\left(\tan \frac{26\pi}{5}\right)$$

$$= \arctan\left(\tan\left(5\pi + \frac{\pi}{5}\right)\right)$$

$$= \arctan\left(\tan \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= \frac{\pi}{5}$$

car $\frac{\pi}{5} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$26 = 5 \times 5 + 1$

$\frac{26}{5} = 5 + \frac{1}{5}$

$\forall k \in \mathbb{Z},\ \tan(x + k\pi) = \tan(x)$

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \arctan(\tan x) = x$

fin Ex 1

Exercice 3 :

1) Montrer que

$$\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q} = -\tan\frac{p-q}{2}$$

2) En déduire que $\tan\frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

1) Rappels :

$$\cos a + \cos b = -2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Ainsi :

$$\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q} = \frac{-\cancel{2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)}\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}{\cancel{2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)} = -\tan\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

2) En déduire que $\tan\frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

Prenons $p = \frac{\pi}{4}$ et $q = \frac{\pi}{6}$. On a :

$$\frac{p-q}{2} = \dots = \frac{\pi}{24}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{24}\right) = \tan\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$= -\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q}$$

$$= -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$

fin Ex 3

Exercice 4 :

1) Simplifier pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(\tanh x) - \arctan(e^{2x})$

2) Simplifier :

   a) $argch(2x^2 - 1)$

   b) $argsh\left(2x\sqrt{1+x^2}\right)$

1) Posons $f(x) = \arctan(\tanh(x)) - \arctan(e^{2x})$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \left(\arctan(\tanh(x))\right)' - \left(\arctan(e^{2x})\right)'$$

$$= \tanh'(x) \times \arctan'(\tanh(x)) - (e^{2x})' \arctan'(e^{2x})$$

$$= \left(1 - \tanh^2(x)\right) \times \frac{1}{1+\tanh^2(x)} - \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}$$

$$= \frac{\frac{1}{ch^2(x)}}{1 + \frac{sh^2(x)}{ch^2(x)}} - \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}$$

$$= \frac{1}{ch^2(x) + sh^2(x)} - \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}$$

$$= \frac{1}{ch(2x)} - \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}$$

$ch(a+b) = cha\, chb + sha\, shb$

$ch(2a) = ch^2 a + sh^2 a$

$$= \frac{2}{e^{2x} + e^{-2x}} - \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}$$

$$= \frac{2e^{2x}}{e^{4x}+1} - \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}$$

$$= 0$$

Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)=0)$

D'où f est constante sur $\mathbb{R}$

$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)$

Avec $f(0) = \arctan(\tanh(0)) - \arctan(1)$

$= \underbrace{\arctan(0)}_{=0} - \underbrace{\arctan(1)}_{=\pi/4}$

$= -\dfrac{\pi}{4}$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan(\tanh(x)) - \arctan(e^{2x}) = -\frac{\pi}{4}$$

2) Simplifier :

a) $argch(2x^2 - 1)$

Clé : $\forall a \in \mathbb{R}$, $ch(2a) = 2ch^2 a - 1$
et $x = ch(a)$

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'abord :

$argch(2x^2-1)$ défini $\Leftrightarrow 2x^2 - 1 \geqslant 1$

$\Leftrightarrow x^2 \geqslant 1$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

Soit $x \geqslant 1$

Soit $a \in \mathbb{R}^+$ tel que $x = ch(a)$. (en fait $a = argch(x)$)

On a :

$$\operatorname{argch}(2x^2-1) = \operatorname{argch}(2\operatorname{ch}^2(a)-1) \quad (x = \operatorname{ch}(a))$$
$$= \operatorname{argch}(\operatorname{ch}(2a))$$
$$= 2a \quad (\text{car } 2a \in \mathbb{R}^+)$$
$$= 2\operatorname{argch}(x)$$

D'où : $\forall x \geq 1,\ \operatorname{argch}(2x^2-1) = 2\operatorname{argch}(x)$ (Ω)

Soit $x \leq -1$

On a :
$$\operatorname{argch}(2x^2-1) = \operatorname{argch}(2(-x)^2-1)$$
$$= 2\operatorname{argch}(-x) \quad (\text{car } (-x) \geq 1 \text{ et vu } (\Omega))$$

Enfin, On a :

$$\operatorname{argch}(2x^2-1) = \begin{cases} 2\operatorname{argch}(x) & \text{si } x \geq 1 \\ 2\operatorname{argch}(-x) & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

Ou encore : $\forall x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[,\ \operatorname{argch}(2x^2-1) = 2\operatorname{argch}(|x|)$

b) $argsh\left(2x\sqrt{1+x^2}\right)$

Clé

$argsh(sh(a)) = a$

$sh(2a) = 2sh(a)ch(a) = 2sh(a)\sqrt{1+sh^2(a)}$

vu que : $\left(ch^2(a) = 1 + sh^2(a)\right)$

Et on posera $sh(a) = x$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $x = sh(a)$ $\left(a = argsh(x)\right)$

On a :

$$argsh\left(2x\sqrt{1+x^2}\right) = argsh\left(2sh(a)\sqrt{1+sh^2(a)}\right)$$

$$= argsh\left(2sh(a)\sqrt{ch^2(a)}\right) \quad \left(\text{car } ch^2 - sh^2 = 1\right)$$

$$= argsh\left(\underbrace{2sh(a)ch(a)}_{=sh(2a)}\right)$$

$$= argsh\left(sh(2a)\right)$$

$$= 2a$$

$$= 2argsh(x)$$

Exercice 5 :

Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Calculer $f'(x)$.

3) Que peut-on déduire ?

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$x \in D_f \iff \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ est défini

$\iff \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \in [-1,1]$ et $x^2+1>0$

$\iff \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| \leq 1$

$\iff |x| \leq \sqrt{x^2+1}$

$\iff |x|^2 \leq \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2$

$\iff x^2 \leq x^2+1$

Ce qui est toujours vrai.

D'où $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f'(x) = \left(\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right)'$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' \times \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}}$$

$\boxed{\arcsin' t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - x \times \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2+1}}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \times \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

$$= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \times \sqrt{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{x^2+1}$$

3°) On a :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{x^2+1}\right)$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \arctan'(x)$$

$$\Rightarrow \left(\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \arctan(x) + C\right)$$

Pour $x = 0$, on a $\underbrace{f(0)}_{=0} = \underbrace{\arctan(0)}_{=0} + C$

$$\Rightarrow C = 0$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \arctan(x)$

fin Ex 5

Exercice 6 :

Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) En posant $x = \tan t$, trouver une expression simplifiée de $f(x)$.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x \in D_f \iff \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) \text{ est défini}$$

$$\iff \left(x^2+1 \neq 0 \text{ et } \frac{2x}{x^2+1} \in [-1,1]\right)$$

$$\iff \left|\frac{2x}{x^2+1}\right| \leq 1$$

$$\iff |2x| \leq x^2+1$$

$$\iff |x|^2+1-2|x| \geq 0$$

$$\iff (|x|-1)^2 \geq 0$$

Ce qui est toujours vrai.

D'où $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Posons $x = \tan(t)$, où $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On a :

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$$

$$= \arcsin\left(\frac{2\tan t}{\tan^2(t)+1}\right)$$

$$= \arcsin\left(2\tan t \times \cos^2 t\right)$$

$$= \arcsin\left(2\sin t \cos t\right)$$

$$= \arcsin\left(\sin(2t)\right)$$

Cas 1 : Si $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$; càd $2t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; càd $-1 \leqslant x \leqslant 1$

$f(x) = \arcsin\left(\sin(2t)\right)$

$= 2t$ $\left(\text{car } \forall a \in \left[-\pi/2, \pi/2\right], \arcsin(\sin a) = a\right)$

$= 2\arctan(x)$ $\left(\text{car } x = \tan t \text{ et } t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Cas 2 : Si $t \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$; càd $2t \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$; càd $x > 1$

$f(x) = \arcsin\left(\sin(2t)\right)$

$= \arcsin\left(\sin(\pi - 2t)\right)$ $\left(\text{car } \forall y \in \mathbb{R}, \sin y = \sin(\pi - y)\right)$

$= \pi - 2t$ $\left(\text{car } 0 < \pi - 2t < \frac{\pi}{2}\right)$

$= \pi - 2\arctan(x)$

Cas 3 : Si $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[$, (càd $x = \tan t < -1$)

On exploite que f est impaire et le cas 2. On a :

$f(x) = -f(-x)$ (car f impaire)

$= -\left(\pi - 2\arctan(-x)\right)$, car $-x > 1$ et d'après Cas 2.

$= -\pi + 2\arctan(-x)$

$= -\pi - 2\arctan(x)$ (Car arctan est impaire)

Conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -\pi - 2\arctan(x) & \text{si } x < -1 \\ 2\arctan(x) & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \pi - 2\arctan(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exercice 9 :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1) Montrer que si $a \neq 0$ alors

$$\sum_{k=0}^{n} \cosh(ka) = \frac{\cosh(\frac{na}{2}) \sinh\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sinh(\frac{a}{2})}$$

2) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cosh(a+kb)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sinh(a+kb)$

1) $$\sum_{k=0}^{n} Ch(ka) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ka}+e^{-ka}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ka} + \sum_{k=0}^{n} e^{-ka}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} (e^{a})^{k} + \sum_{k=0}^{n} (e^{-a})^{k}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-(e^{a})^{n+1}}{1-e^{a}} + \frac{1-(e^{-a})^{n+1}}{1-e^{-a}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{(n+1)a}}{1-e^{a}} + \frac{1-e^{-(n+1)a}}{1-e^{-a}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{\frac{(n+1)a}{2}}\left(e^{-\frac{(n+1)a}{2}} - e^{\frac{(n+1)a}{2}}\right)}{e^{a/2}\left(e^{-a/2} - e^{a/2}\right)} + \frac{e^{-\frac{(n+1)a}{2}}\left(e^{\frac{(n+1)a}{2}} - e^{-\frac{(n+1)a}{2}}\right)}{e^{-a/2}\left(e^{a/2} - e^{-a/2}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{na}{2}} \frac{-2\,sh\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{-2\,sh\left(\frac{a}{2}\right)} + e^{-\frac{na}{2}} \frac{2\,sh\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{2\,sh\left(\frac{a}{2}\right)} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{sh\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{sh\left(\frac{a}{2}\right)} \cdot \left(e^{n\frac{a}{2}} + e^{-n\frac{a}{2}}\right)$$

$$= \frac{Ch\left(\frac{na}{2}\right) sh\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{sh\left(\frac{a}{2}\right)}$$

2) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cosh(a+kb)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sinh(a+kb)$

Notons $C = \sum_{k=0}^{n} Ch(a+kb)$ et $S = \sum_{k=0}^{n} sh(a+kb)$

On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} Ch(x) + sh(x) = e^{x} \\ Ch(x) - sh(x) = e^{-x} \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} C+S = \sum_{k=0}^{n} e^{a+kb} \\ C-S = \sum_{k=0}^{n} e^{-a-kb} \end{cases}$

L'idée est de tirer C et S après avoir simplifié les deux sommes $\sum_{k=0}^{n} e^{a+kb}$ et $\sum_{k=0}^{n} e^{-a-kb}$.

On a :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{a+kb} = e^{a} \sum_{k=0}^{n} (e^{b})^{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} z^{k} = \begin{cases} \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} & \text{si } z \neq 1 \\ n+1 & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

Cas 1 : Si $e^{b} = 1$ (càd Si $b = 0$)

C'est facile.

$$C = \sum_{k=0}^{n} ch(a) = (n+1)\, ch(a)$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} sh(a) = (n+1)\, sh(a)$$

Cas 2 : Si $e^{b} \neq 1$ (càd Si $b \neq 0$)

$$\sum_{k=0}^{n} e^{a+kb} = e^{a} \sum_{k=0}^{n} (e^{b})^{k}$$

$$= e^{a} \cdot \frac{1-(e^{b})^{n+1}}{1-e^{b}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} e^{a+kb} = e^{a} \cdot \frac{1-e^{(n+1)b}}{1-e^{b}}$$

De même :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{-a-kb} = e^{-a} \cdot \frac{1-e^{-(n+1)b}}{1-e^{-b}}$$

Le système $\begin{cases} C+S = \sum_{k=0}^{n} e^{a+kb} \\ C-S = \sum_{k=0}^{n} e^{-a-kb} \end{cases}$ devient :

$$\begin{cases} C+S = e^{a} \cdot \dfrac{1-e^{(n+1)b}}{1-e^{b}} \\ C-S = e^{-a} \cdot \dfrac{1-e^{-(n+1)b}}{1-e^{-b}} \end{cases}$$

Par sommation et par soustraction, on tire C et S :

$$C = \frac{1}{2}\left(e^{a} \cdot \frac{1-e^{(n+1)b}}{1-e^{b}} + e^{-a} \cdot \frac{1-e^{-(n+1)b}}{1-e^{-b}}\right)$$

$= \ldots$ (Pareil à 1°/)

$$C = \frac{\operatorname{ch}\left(a + \frac{nb}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{\operatorname{sh}(b/2)}$$

$$S = \frac{1}{2}\left(e^{a} \cdot \frac{1-e^{(n+1)b}}{1-e^{b}} - e^{-a} \cdot \frac{1-e^{-(n+1)b}}{1-e^{-b}}\right)$$

$= \ldots$ (Pareil à 1°/)

$$S = \frac{\operatorname{ch}\left(a + \frac{nb}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{\operatorname{sh}(b/2)}$$

Exercice 12 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\left(\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}\right)^n = \frac{1+\tanh(nx)}{1-\tanh(nx)}$$

$$\left(\frac{1+th(x)}{1-th(x)}\right)^n = \left(\frac{1+\frac{sh(x)}{ch(x)}}{1-\frac{sh(x)}{ch(x)}}\right)^n$$

$$= \left(\frac{\frac{ch(x)+sh(x)}{ch(x)}}{\frac{ch(x)-sh(x)}{ch(x)}}\right)^n$$

$$= \left(\frac{ch(x)+sh(x)}{ch(x)-sh(x)}\right)^n$$

$$= \left(\frac{e^x}{e^{-x}}\right)^n$$

$$= \frac{e^{nx}}{e^{-nx}}$$

$$= \frac{ch(nx)+sh(nx)}{ch(nx)-sh(nx)}$$

$$= \frac{\frac{ch(nx)+sh(nx)}{ch(nx)}}{\frac{ch(nx)-sh(nx)}{ch(nx)}}$$

$$= \frac{1+th(nx)}{1-th(nx)}$$

Exercice 13 :

1) Montrer que $\left(\forall p \in \mathbb{N},\ \arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)\right)$

2) En déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$; où $S_n = \sum_{p=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$.

1) Soit $p \in \mathbb{N}$.

Pour montrer que $\arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$

il suffit qu'on vérifie que :

a) $\arctan(p+1) - \arctan(p)$ et $\arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

b) $\tan\left(\arctan(p+1) - \arctan(p)\right) = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)\right)$

Pour a) :

On a $p \geq 0 \Rightarrow \arctan(p) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

et de même $\arctan(p+1) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

Ainsi $\arctan(p+1) - \arctan(p) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Et on a $\arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; c'est évident.

Pour b) :

Rappels :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan x) = x$

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

On a : $\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)\right) = \frac{1}{p^2+p+1}$

et :

$$\tan\left(\arctan(p+1) - \arctan(p)\right) = \frac{\tan(\arctan(p+1)) - \tan(\arctan(p))}{1 + \tan(\arctan(p+1))\tan(\arctan p)}$$

$$= \frac{p+1-p}{1+(p+1)p}$$

$$= \frac{1}{1+p+p^2}$$

D'où l'égalité voulue.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \left(\arctan(p+1) - \arctan(p)\right)$$

$$= \arctan(n+1) - \underbrace{\arctan(0)}_{=0}$$

$$= \arctan(n+1)$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \arctan(n+1) = \frac{\pi}{2}$$

Fin