

SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 1 :

Déterminer la nature de la série $\sum_n u_n$ dans chacun des cas suivants :

- 1) $u_n = \frac{ch(n)}{ch(2n)}$ 2) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ 3) $u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
 4) $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ 5) $u_n = \frac{1}{n \cos^2 n}$ 6) $u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

Exercice 2 :

Déterminer la nature de la série $\sum_n u_n$ dans chacun des cas suivants :

- 1) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ 2) $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+(-1)^n)}$ 3) $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n}$
 4) $u_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}$ 5) $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ 6) $u_n = \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$
 7) $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}}$ 8) $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ 9) $u_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n k^{\frac{3}{2}}$

Exercice 3 :

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs. Notons $v_n = \frac{u_n}{u_{n+1}}$. Montrons que

$$\sum_n u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_n v_n \text{ converge}$$

Exercice 4 :

1) Notons $u_n = \sin((2 - \sqrt{3})^n \pi)$

i) Montrer que la série $\sum_n u_n$ est à termes positifs.

ii) Quelle est sa nature ?

2) Posons $A_n = (2 - \sqrt{3})^n + (2 + \sqrt{3})^n$. Montrer que $A_n \in \mathbb{N}$.

3) En déduire la nature de la série $\sum_n v_n$; où $v_n = \sin((2 + \sqrt{3})^n \pi)$

Exercice 5 :

Justifier l'existence des sommes suivantes et calculer-les :

- 1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)}$ 3) $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ 4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$
 5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$ 6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ 7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{th\left(\frac{a}{2^n}\right)}{2^n}$

Exercice 6 :

On donne les sommes : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Calculer les sommes suivantes après avoir justifié leurs existences :

$$1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} \quad 4) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!}$$

Exercice 7 :

Posons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ et préciser $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n$.

2) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$$

3) Déterminer un équivalent simple de R_n .

4) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} R_n$?

Exercice 8 :

Considérons deux suites complexes $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Posons $u_n = \alpha_n v_n$

et $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$.

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k + \alpha_n S_n$$

2) Supposons maintenant que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est réelle positive décroissante de limite nulle, et que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Montrer que la série $\sum_n (\alpha_n - \alpha_{n+1}) S_n$ converge absolument et que la

série $\sum_n u_n$ converge.

3) Soient $\beta > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

i) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |1 + e^{i\theta} + \dots + e^{in\theta}| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$$

- ii) En déduire la convergence des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\beta}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n)}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$.

Exercice 9 :

Notons $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- 1) Montrer que $H_n \sim \ln(n)$
- 2) Posons $U_n = H_n - \ln(n)$.
 - i) Montrer que $(U_{n+1} - U_n) = O(1/n^2)$.
 - ii) En déduire que

$$\exists \eta \in \mathbb{R}, H_n = \ln(n) + \eta + o(1)$$

- 3) Posons $V_n = H_n - \ln(n) - \eta$.
 - i) Montrer que $(V_{n+1} - V_n) \sim \frac{-1}{n^2}$
 - ii) En déduire que $V_n \sim \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$
- 4) i) Montrer via une comparaison série-intégrale que

$$\forall \alpha > 1, \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

- ii) En déduire que $H_n = \ln(n) + \eta + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Exercice 10 : (Séries de Bertrand)

- 1) Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge et que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^2}$ diverge.
- 2) Montrer que

$$\forall \beta \in \mathbb{R}, \forall \alpha > 1, \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge}$$

- 3) Montrer que

$$\forall \beta \in \mathbb{R}, \forall \alpha < 1, \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ diverge}$$

- 4) Par comparaison série-intégrale, montrer que

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \text{ converge} \Leftrightarrow \beta > 1$$