I Préliminaires

Q 1. Soit $x \in \mathrm{F}^{\perp}$. Montrons $u(x) \in \mathrm{F}^{\perp}$.
Soit alors $y \in \mathrm{F}$. Il suffit d'établir que $u(x) \perp y$.
Comme $u(y) \in \mathrm{F}$, on a :

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = 0$$

On a bien montré que $\boxed{\text{l'orthogonal } \mathrm{F}^{\perp} \text{ de F est stable par } u}$

Q 2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a : $\varphi(t) = \langle \cos(t)u(x_0) + \sin(t)u(y), \cos(t)x_0 + \sin(t)y\rangle$ donc

$$\varphi(t) = \cos^2(t)\langle u(x_0), x_0\rangle + \sin^2(t)\langle u(y), y\rangle + \cos(t)\sin(t)\left(\langle u(x_0), y\rangle + \langle u(y), x_0\rangle\right)$$

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1}$ par théorèmes généraux.

Q 3. Je note $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(x_0, y)$.
Ainsi (x_0, y) est génératrice de G et orthonormale, il s'agit donc d'une base orthonormée de G.
Par calcul dans une base orthonormée : on a $\boxed{\|\gamma(t)\| = \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} = 1}$
Ainsi par définition de x_0 et comme $\gamma(0) = x_0$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) \leqslant \langle u(x_0), x_0\rangle = \varphi(0)$$

Ainsi φ admet un maximum sur $\mathbb{R}$ en 0 donc $\boxed{\varphi'(0) = 0}$

Q 4. D'après Q2, on a, en remarquant que $2\sin(t)\cos(t) = \sin(2t)$,

$$\varphi' : t \mapsto 2\cos(t)\sin(t)\left(\langle u(y), y\rangle - \langle u(x_0), x_0\rangle\right) + \cos(2t)\left(\langle u(x_0), y\rangle + \langle u(y), x_0\rangle\right)$$

Ainsi, par propriété de u et de $\langle \cdot, \cdot\rangle$, on a :

$$0 = \varphi'(0) = \langle u(x_0), y\rangle + \langle u(y), x_0\rangle = 2\langle u(x_0), y\rangle$$

donc $\boxed{u(x_0) \text{ est orthogonal à } y}$

Q 5. On se place dans F muni de la structure préhilbertienne induite par $\langle \cdot, \cdot\rangle$.
Or on vient de voir en Q4 que : $u(x_0) \in \left(\mathrm{Vect}(x_0)^{\perp}\right)^{\perp}$ (les sous-espaces orthogonaux sont pris dans F)
Comme $\mathrm{Vect}(x_0)$ est de dimension finie,
on a $u(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0)$ or $x_0 \neq 0$, alors $\boxed{x_0 \text{ est vecteur propre de } u}$

II Étude d'un opérateur

Q 6. La fonction k_s est affine sur $[0, s[$ et sur $[s, 1]$ et $\lim\limits_{t \to s^-} = k_s(s)$
Ainsi k_s est continue sur $[0, 1]$ et croissante sur $[0, s]$ et décroissante sur $[s, 1]$.
$\boxed{\text{La courbe représentative de } k_s \text{ est le triangle de sommets } (0,0),\ (1,0) \text{ et } (s, s(1-s)) \text{ privé de } [0,1]\times\{0\}}$

Q 7. Je note : $\Omega_1 = \left\{(s,t) \in [0,1]^2 \mid s < t\right\}, \mathrm{F}_1 = \left\{(s,t) \in [0,1]^2 \mid s \leqslant t\right\}, \Omega_2 = \left\{(s,t) \in [0,1]^2 \mid s > t\right\},$
$\mathrm{F}_1 = \{(s,t) \in [0,1] \mid s \geqslant t\}$ et $\Delta \left\{(s,t) \in [0,1]^2 \mid s = t\right\}$.
On a $\forall (s,t) \in \Delta$, $\mathrm{K}(s,t) = s(1-t) = s(1-s) = t(1-s)$ Donc

$$\forall (s,t) \in \mathrm{F}_1,\ \mathrm{K}(s,t) = s(1-t) \quad \text{et} \quad \forall (s,t) \in \mathrm{F}_2,\ \mathrm{K}(s,t) = t(1-s)$$

Ainsi K est continue sur F_1 (c'est-à-dire que la restriction de K à F_1 est continue) et K est continue sur Ω_1 or Ω_1 est un ouvert relatif de $[0,1]^2$ en tant qu'image réciproque par l'application $(x,y) \in [0,1]^2 \longmapsto y - x \in \mathbb{R}$ de l'ouvert $]0,+\infty[$
donc K est continue en tout point de Ω_1.

De même, K est continue en tout point de Ω_2.

Je munis $\mathbb{R}^2$ d'une norme notée N ; le choix importe peu ; toutes les normes sont équivalentes sur un espace de dimension finie. Soit $X \in \Delta$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme K est continue sur F_1 et $\Delta \subset F_1$, ceci nous fournit $\alpha_1 > 0$ tel que

$$\forall Y \in F_1,\ N(X - Y) \leqslant \alpha_1 \Longrightarrow |K(X) - K(Y)| \leqslant \varepsilon$$

De même, on trouve $\alpha_2 > 0$ tel que

$$\forall Y \in F_2,\ N(X - Y) \leqslant \alpha_2 \Longrightarrow |K(X) - K(Y)| \leqslant \varepsilon$$

En prenant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$, on prouve que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall Y \in [0,1]^2,\ N(X - Y) \leqslant \alpha \Longrightarrow |K(X) - K(Y)| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi K est continue en tout point de Δ
Alors K est continue en tout point de $[0,1] \times [0,1] = \Omega_1 \bigcup \Omega_2 \bigcup \Delta$
D'où $\boxed{\text{K est continue sur } [0,1] \times [0,1]}$

Q 8. Il s'agit de montrer que $T : E \longrightarrow E$ est bien définie, linéaire et continue.
Soit $f, g \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

T **est définie sur** E **:** Soit $s \in [0,1]$. L'application $t \mapsto k_s(t)f(t) = K(s,t)f(t)$ est continue sur $[0,1]$.
Donc $T(f)(s) = \displaystyle\int_0^1 k_s(t)f(t)\mathrm{d}t$ est un réel bien défini.
Donc $T(f)$ est une application bien définie $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

T **est à valeurs dans** E **:** Soit $s \in [0,1]$. On a, d'après Chasles :

$$T(f)(s) = \int_0^s k_s(t)f(t)\mathrm{d}t + \int_s^1 k_s(t)f(t)\mathrm{d}t = (1-s)\int_0^s tf(t)\mathrm{d}t + s\int_s^1 (1-t)f(t)\mathrm{d}t$$

L'application $t \mapsto tf(t)$ est continue sur l'intervalle $[0,1]$, ainsi selon le théorème fondamental de l'analyse la fonction $s \mapsto \displaystyle\int_0^s tf(t)\mathrm{d}t$ en est une primitive sur $[0,1]$ donc dérivable donc continue.
Il en est de même pour $s \mapsto \displaystyle\int_s^1 (1-t)f(t)\mathrm{d}t$.
Ainsi $T(f)$ est continue par somme et produit.
D'où $T(f) \in E$
On vient de prouver que $T : E \longrightarrow E$ est bien définie.

Linéarité Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\forall s \in [0,1],\ T(\lambda f + g)(s) = \lambda T(f)(s) + T(g)(s)$$

d'où $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$. T est bien linéaire.

Continuité : D'après 6, k_s est continue donc $k_s \in \mathrm{E}$.

Ainsi pour $s \in [0,1]$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall s \in [0,1],\ |\mathrm{T}(f)(s)| = |\langle k_s, f\rangle| \leqslant \|k_s\| \cdot \|f\|$$

L'application K est continue sur le compact $[0,1]^2$ (produit de deux compacts), le théorème des bornes atteintes nous fournit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall (s,t) \in [0,1]^2,\ |k_s(t)| = |\mathrm{K}(s,t)| \leqslant \mathrm{M}$$

d'où $\forall s \in [0,1],\ \|k_s\| = \sqrt{\int_0^1 \mathrm{K}(s,t)^2 \mathrm{d}t} \leqslant \mathrm{M}$ puis

$$\forall s \in [0,1],\ (\mathrm{T}(f)(s))^2 \leqslant \mathrm{M}^2 \|f\|^2$$

En intégrant sur $[0,1]$ et en prenant la racine carrée, on obtient

$$\|\mathrm{T}(f)\| \leqslant \mathrm{M}\,\|f\|$$

d'où T est continue par caractérisation des applications linéaires continues.

Conclusion : $\boxed{\text{T est un endomorphisme continu de E}}$

Q 9. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $s \in [0,1]$. En réutilisant Chasles comme en 8 :

$$\mathrm{T}(p_k)(s) = (1-s)\int_0^s t\mathrm{P}_k(t)\mathrm{d}t + s\int_s^1 (1-t)p_k(t)\mathrm{d}t = (1-s)\int_0^s t^{k+1}\mathrm{d}t + s\int_s^1 \left(t^k - t^{k+1}\right)\mathrm{d}t$$

donc

$$\mathrm{T}(p_k)(s) = (1-s)\left[\frac{t^{k+2}}{k+2}\right]_{t=0}^{t=s} + s\left[\frac{t^{k+1}}{k+1} - \frac{t^{k+2}}{k+2}\right]_{t=s}^{t=1} = \frac{s^{k+2}-s^{k+3}}{k+2} + \frac{s-s^{k+2}}{k+1} - \frac{s-s^{k+3}}{k+2}$$

ainsi

$$\mathrm{T}(p_k)(s) = \frac{s-s^{k+2}}{(k+1)(k+2)}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a donc $\boxed{\mathrm{T}(p_k) = \frac{1}{(k+1)(k+2)}(p_1 - p_{k+2}) \in \mathrm{F}}$

Comme T linéaire et $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\left((p_k)_{k\in\mathbb{N}}\right)$, on a $\mathrm{T}(\mathrm{F}) = \mathrm{Vect}\left((\mathrm{T}(p_k))_{k\in\mathbb{N}}\right) \subset \mathrm{F}$ et $\boxed{\text{F est stable par T}}$

Q 10. On a d'après 9 :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (\mathrm{T}(p_k))'' = \left[\frac{1}{(k+1)(k+2)}(p_1 - p_{k+2})\right]'' = \left[\frac{1}{(k+1)(k+2)}(p_0 - (k+2)p_{k+1})\right]' = p_k$$

Par composition, l'application $p \in \mathcal{F} \mapsto (\mathrm{T}(p))'' \in \mathrm{F}$ est un endomorphisme de F.

Elle coïncide avec l'application linéaire Id_F sur $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui est une base de F.

On en déduit $\boxed{(\mathrm{T}(p))'' = p \text{ pour tout } p \in \mathrm{F}}$

Q 11. En réutilisant la relation de Chasles de Q8, on a

$$\mathrm{T}(f)(0) = (1-0)\int_0^0 tf(t)\mathrm{d}t + 0\int_0^1 (1-t)f(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{T}(f)(1) = (1-1)\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t + 1\int_1^1 (1-t)f(t)\mathrm{d}t$$

donc $\boxed{\mathrm{T}(f)(0) = 0 \text{ et } \mathrm{T}(f)(1) = 0}$

Q 12. Pour rappel, $\mathrm{T}(f) : s \longmapsto (1-s)\displaystyle\int_0^s tf(t)\mathrm{d}t + s\int_s^1 (1-t)f(t)\mathrm{d}t = (1-s)\int_0^s tf(t)\mathrm{d}t - s\int_1^s (1-t)f(t)\mathrm{d}t$

Ainsi $\mathrm{T}(f)$ est dérivable sur $[0,1]$, en utilisant le théorème fondamental de l'analyse et

$$\mathrm{T}(f)' : s \longmapsto -\int_0^s tf(t)\mathrm{d}t + (1-s)sf(s) - \int_1^s (1-t)f(t)\mathrm{d}t - s(1-s)f(s) = -\int_0^s tf(t)\mathrm{d}t - \int_1^s (1-t)f(t)\mathrm{d}t$$

puis $\mathrm{T}(f)'$ est dérivable sur $[0,1]$ et

$$\mathrm{T}(f)'' : s \longmapsto -sf(s) - (1-s)f(s) = -f(s)$$

Comme f est continue alors $\boxed{\mathrm{T}(f) \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ et } \mathrm{T}(f)'' = -f}$

Q 13. Soit $f \in \mathrm{Ker(T)}$. On a $\mathrm{T}(f) = 0_{\mathrm{E}}$ donc en dérivant $f = 0_{\mathrm{E}}$

L'autre implication étant évidente on a : $\mathrm{Ker(T)} = \{0_{\mathrm{E}}\}$ ainsi $\boxed{\text{T est injectif}}$

Q 14. On a vu en Q12 et en Q11 que $\mathrm{Im(T)} \subset \{f \in \mathrm{E} \mid f(0) = f(1) = 0\} \cap \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ où $\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel de E constitué des applications de classe $\mathcal{C}^2$.

Soit $f \in \mathrm{E}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

On a $f'' \in \mathrm{E}$ donc $\mathrm{T}(-f'')$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et $\mathrm{T}(-f'')'' = f''$ d'après Q12.

Je note $g = \mathrm{T}(-f'') - f$ de sorte que g'' est identiquement nulle sur $[0,1]$.

Ainsi g est affine or d'après Q11, $g(0) = g(1) = 0$.

Donc g est identiquement nulle sur $[0,1]$.

Donc $f = \mathrm{T}(-f'') \in \mathrm{Im(T)}$

$\boxed{\text{L'image de T est l'ensemble des fonctions de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0,1] \text{ s'annulant en 0 et en 1}}$

Q 15. On $\mathrm{T}(f) = \lambda f$ donc $f = \mathrm{T}\left(\dfrac{1}{\lambda}f\right)$

Avec 12, f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $f'' = -\dfrac{1}{\lambda}f$

donc $\boxed{f \text{ est solution de l'équation différentielle } \lambda f'' = -f}$

Q 16. **Analyse :** Soit λ une valeur propre de T et f un vecteur propre associé.

On sait que $\lambda \neq 0$ car T injective d'après Q13.

Si $\lambda > 0$. Alors d'après la question précédente $f'' + \left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 f = 0$

Ceci nous fournit A et $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$ tels que $f : t \longmapsto \mathrm{A}\sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) + \mathrm{B}\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)$

Comme $f(0) = 0 = f(1)$, on a $\mathrm{B} = 0$ et $\mathrm{A}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$

Ce qui nous fournit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = k\pi$ car $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} > 0$

donc $f \in \mathrm{Vect}(t \mapsto \sin(k\pi t))$ et $\lambda = \dfrac{1}{k^2\pi^2}$

ainsi $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{T}) \subset \mathrm{Vect}(t \mapsto \sin(k\pi t))$

Si $\lambda < 0$, on a $\lambda = -\left(\sqrt{-\lambda}\right)^2$ et on trouve A et $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$ tels que $f : t \longmapsto \mathrm{A}\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{t}{\sqrt{-\lambda}}\right) + \mathrm{B}\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{t}{\sqrt{-\lambda}}\right)$

donc $\mathrm{B} = 0$ puis $\mathrm{sh}\left(\dfrac{t}{\sqrt{-\lambda}}\right) = 0$

or ce cas est impossible car $\forall t > 0,\ \mathrm{sh}(t) > 0$.

Synthèse : Soit $\lambda = \dfrac{1}{k^2\pi^2}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $f : t \mapsto \sin(k\pi t)$

Je note $g = \mathrm{T}(f)$ d'après 12, on a $g'' = -f$

ainsi il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$, tel que $g' : t \mapsto \mathrm{C} - \dfrac{1}{k\pi}\cos(k\pi t)$

puis il existe $\mathrm{D} \in \mathbb{R}$ tel que $g : t \mapsto \mathrm{C}t + \mathrm{D} - \dfrac{1}{k^2\pi^2}\sin(k\pi t)$

On sait que $g(0) = g(1) = 0$ donc $\mathrm{D} = 0$ puis $\mathrm{C} = 0$

donc $\mathrm{T}(f) = g = \lambda f$

donc $f \in \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{T})$ et $f \neq 0$ car $f(1/2k) = 1$

donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ (ensemble des valeurs propres de T) et $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{T}) \supset \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \sin(k\pi t))$

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \left\{\dfrac{1}{k^2\pi^2} \mid k \in \mathbb{N}^*\right\} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{E}_{1/k^2\pi^2}(\mathrm{T}) = \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \sin(k\pi t))}$

Les sous-espaces propres de T sont bien des droites.

Q 17. Soit $(f, g) \in \mathrm{E}^2$. D'après 12, $\mathrm{T}(-g)'' = g$ ainsi et $\mathrm{T}(f)$ et $\mathrm{T}(-g)'$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Ainsi par intégration par parties et comme $\mathrm{T}(f)(0) = \mathrm{T}(f)(1) = 0$, on a :

$$\langle \mathrm{T}(f), g\rangle = \int_0^1 \mathrm{T}(f)g = \left[\mathrm{T}(f)\mathrm{T}(-g)'\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{T}(f)'\mathrm{T}(-g)' = \int_0^1 \mathrm{T}(f)'\mathrm{T}(g)'$$

donc $\boxed{\langle \mathrm{T}(f), g\rangle = \int_0^1 \mathrm{T}(f)'\mathrm{T}(g)' = \langle \mathrm{T}(g), f\rangle = \langle f, \mathrm{T}(g)\rangle}$

Q 18. Par l'absurde, on suppose que $\mathrm{H} \neq \{0\}$. Le résultat admis nous fournit

$$f \in \mathrm{H} \text{ telle que } \begin{cases} \|f\| = 1 \\ \langle \mathrm{T}(f), f\rangle = \sup\limits_{h \in \mathrm{H}, \|h\| = 1} \langle \mathrm{T}(h), h\rangle \end{cases}$$

En appliquant la partie I à $f = x_0$ et $\mathrm{H} = \mathrm{F}$ et $\mathrm{T} = u$, f est vecteur propre de T.

Donc il existe $\mu \in \mathbb{R}^*$ tel que $f = \mu g_k$ d'après 16

donc $f \in \mathrm{G} \bigcap \mathrm{G}^\perp$ donc $f = 0$ et $\|f\| = 1$ Absurde

On en déduit que $\boxed{\mathrm{H} = \{0\}}$

Q 19. Soit $k, \ell \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\langle g_k, g_\ell\rangle = 2\int_0^1 \sin(k\pi x)\sin(\ell\pi x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\cos((k-\ell)\pi x) - \cos((k+\ell)\pi x)\right]\mathrm{d}x$$

Si $k \neq \ell$, alors on a

$$\langle g_k, g_\ell\rangle = \left[\frac{\sin((k-\ell)\pi x)}{(k-\ell)\pi} - \frac{\sin((k+\ell)\pi x)}{(k+\ell)\pi}\right]_{x=0}^{x=1} = 0$$

Si $k = \ell$, alors on a

$$\langle g_k, g_k\rangle = \int_0^1 (1 - \cos(2k\pi x))\,\mathrm{d}x = 1$$

Ce qui prouve que $\boxed{\text{la famille de vecteurs } (g_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ est orthonormale}}$

Q 20. *Dans l'énoncé initial, il y a un problème avec les variables k et n pour définir Φ.*

On va montrer que Φ est bien définie et continue sur $[0,1]$.

Je pose $\varphi_k : x \longmapsto \dfrac{1}{k^2\pi^2}\langle f, g_k\rangle g_k(x)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction φ_k est continue sur $[0,1]$. (i)
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [0,1]$.
En utilisant Cauchy-Schwarz, on a : $|\varphi_k(x)| = \dfrac{1}{k^2\pi^2}\,|\langle f, g_k\rangle| \cdot |g_k(x)| \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{k^2\pi^2}\|f\| \cdot \|g_k\|$
donc comme g_k est unitaire, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ |\varphi_k(x)| \leqslant \frac{\sqrt{2}\|f\|}{k^2\pi^2}$$

or la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{\sqrt{2}\|f\|}{k^2\pi^2}$ converge

donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \varphi_k$ converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$

Ainsi la somme de cette série $\boxed{\Phi \text{ est bien définie et continue sur } [0,1]}$

Q 21. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{T}(g_k) = \dfrac{1}{k^2\pi^2} g_k$ d'après Q16 ainsi $\mathrm{T}(f_{\mathrm{N}}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^2\pi^2}\langle f, g_k\rangle g_k$

On note N_∞ la norme infinie sur $\mathrm{E} = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, ce qui est possible d'après le cours.
D'après la question précédente, on a $(\mathrm{T}(f_{\mathrm{N}}))_{\mathrm{N}}$ converge vers Φ pour N_∞ (norme de la convergence uniforme).
Dans le cours, on a vu $\forall g \in \mathrm{E},\ \|g\| \leqslant \sqrt{1-0}\,\mathrm{N}_\infty(g)$ (*si on a oublié, on refait*) donc

$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*,\ \|\mathrm{T}(f_{\mathrm{N}}) - \Phi\| \leqslant \mathrm{N}_\infty\left(\mathrm{T}(f_{\mathrm{N}}) - \Phi\right)$$

par théorème des gendarmes : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \|\mathrm{T}(f_{\mathrm{N}}) - \Phi\| = 0}$

Q 22. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, je note $\mathcal{P}_{\mathrm{N}} = \mathrm{Vect}\,(g_1, \ldots, g_{\mathrm{N}})$.

Comme d'après Q19, $(g_1, \ldots, g_{\mathrm{N}})$ est une base orthonormale de $\mathcal{P}_{\mathrm{N}}$, $f_{\mathrm{N}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \langle f, g_k\rangle g_k$ est le projeté orthogonal de f sur $\mathcal{P}_{\mathrm{N}}$.
Comme la famille $(g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est totale, (f_{N}) converge vers f pour la norme $\|\cdot\|$ d'après le cours.
Comme $\mathrm{T} : (\mathrm{E}, \|\cdot\|) \longrightarrow (\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ est continue d'après Q8
$(\mathrm{T}(f_{\mathrm{N}}))$ converge vers $\mathrm{T}(f)$ pour la norme $\|\cdot\|$.
Or d'après la question précédente $(\mathrm{T}(f_{\mathrm{N}}))$ converge vers Φ pour la norme $\|\cdot\|$.
Par unicité de la limite, on a $\boxed{\mathrm{T}(f) = \Phi}$

III Exemples d'espaces à noyau reproduisant

III.A - Un exemple

Q 23. On admettra que E_1 est bien un espace vectoriel comme le susurre l'énoncé.
Cette question est problématique car a priori pour f et $g \in \mathrm{E}_1$, les fonctions f' et g' peuvent ne pas être définies sur un ensemble fini de points. Toutefois ces fonctions sont définies sur $[0,1]$ sauf en un nombre fini de points. Par ailleurs, en prolongeant f' et g' par n'importe quelles valeurs aux points où ces fonctions ne sont pas définies, on obtient des fonctions continues par morceaux et ce choix n'interviendra pas sur la valeur de l'intégrale.
On considère f, g et $h \in \mathrm{E}_1$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On considère $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$ (où $p\in\mathbb{N}^*$) une subdivision de $[0,1]$ adaptée à f', g' et h'. c'est-à-dire telle que pour tout $i\in[\![1,p]\!]$ les restrictions de f,g et h à $]x_{i-1},x_i[$ se prolongent en des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x_{i-1},x_i]$. On considérera que f', g' et h' sont définies sur $[0,1]$ prolongées en $\{x_i \mid i\in[\![0,p]\!]\}$ par n'importe quelles valeurs de sorte que ces fonctions sont continues par morceaux sur $[0,1]$.

Forme : Le produit de deux fonctions continues par morceaux étant continu par morceaux, on a bien

$$(f\mid g)=\int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t\in\mathbb{R}$$

Linéarité à gauche : Par linéarité de la dérivation en un point,
$\lambda f'+g'$ est la dérivée de $\lambda f+g$ sur $[0,1]\setminus\{x_i \mid i\in[\![0,p]\!]\}$. Ainsi

$$(\lambda f+g\mid h)=\int_0^1(\lambda f'+g')(t)h'(t)\mathrm{d}t=\lambda\int_0^1 f'(t)h'(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 g'(t)h'(t)\mathrm{d}t=\lambda(f\mid h)+(g\mid h)$$

Caractère symétrique : On a bien

$$(f\mid g)=\int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 g'(t)f'(t)\mathrm{d}t=(g\mid f)$$

Linéarité à droite : Conséquence des deux points précédents

Caractère positif : On a bien

$$(f\mid f)=\int_0^1\left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t\geqslant 0$$

Caractère défini : On suppose que $(f\mid f)=0$

donc $0=\displaystyle\int_0^1\left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t$

Comme il s'agit d'une somme de réels positifs, on a donc $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t=0$

Soit $i\in[\![1,p]\!]$. La fonction $(f')^2$ admet sur $[x_{i-1},x_i]$ un prolongement continu en x_{i-1} et x_i, positive d'intégrale nulle.

Ainsi $\forall x\in]x_{i-1},x_i[,\ f'(x)=0$ (vraie dérivée de f ce coup-ci).

Comme f est continue sur $[x_{i-1},x_i]$ alors f y est constante.

On montre ensuite par récurrence sur i que f est constante sur $[0,x_i]$ pour tout $i\in[\![1,p]\!]$.

Pour $i=p$, la fonction f est constante sur $[0,1]$. De plus $f(0)=0$.

Donc f est la fonction nulle.

$\boxed{\text{On définit bien un produit scalaire sur } \mathrm{E}_1 \text{ avec } (\cdot\mid\cdot)}$

Dans la suite de cette partie, on désigne par N la norme associée à ce produit scalaire.

Q 24. Soit $x\in[0,1]$. Avec le théorème fondamental de l'analyse et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$|f(x)|=\left|\int_0^x 1f'(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\sqrt{\int_0^x 1^2\mathrm{d}t\times\int_0^x\left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t}$$

donc on a bien $\boxed{|f(x)|\leqslant\sqrt{x\displaystyle\int_0^x\left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t}}$

Q 25. Soit $s \in [0,1]$. Selon Q6,

la fonction k_s est continue sur $[0,1]$ et $\forall t \in [0,s[\,,\ k_s'(t) = 1-s$ et $\forall t \in]s,1],\ k_s'(t) = -s$.

Ainsi la fonction k_s admet des prolongements de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,s]$ et $[s,1]$.

d'où les restrictions de k_s à $[0,s]$ et $[s,1]$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ (k_s est $\mathcal{C}^1$ par morceaux).

En effectuant des intégrations par parties sur $[0,s]$ et $[s,1]$ avec des fonctions $\mathcal{C}^1$ car f est $\mathcal{C}^2$, on a :

$$\mathrm{U}(f)(s) = \int_0^s k_s'(t)f'(t)\mathrm{d}t + \int_s^1 k_s'(t)f'(t)\mathrm{d}t = \big[k_s(t)f'(t)\big]_{t=0}^{t=s} - \int_0^s k_s(t)f''(t)\mathrm{d}t + \big[k_s(t)f'(t)\big]_{t=s}^{t=1} - \int_s^1 k_s(t)f''(t)\mathrm{d}t$$

Comme $k_s(0) = k_s(1) = 0$ et que $f'' \in \mathrm{E}$, on obtient :

$$\mathrm{U}(f)(s) = -\int_0^1 k_s(t)f''(t)\mathrm{d}t = -\mathrm{T}(f'')(s)$$

d'où $\boxed{\mathrm{U}(f) = -\mathrm{T}(f'')}$

Comme $f'' \in \mathrm{E}$, on a d'après Q12, on a $\mathrm{T}(f'')$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et $\mathrm{T}(f'')'' = -f''$

donc $\left(\mathrm{T}(f'') + f\right)'' = 0$ et la fonction $\mathrm{T}(f'') + f$ s'annule en 0 et 1

donc $\mathrm{T}(f'') + f = 0$ comme en Q14 et $\boxed{\mathrm{U}(f) = f}$

Q 26. Soit $f \in \mathrm{E}_1$. On va tout d'abord montrer <u>le lemme</u> suivant :

$$\text{Soit } \alpha < \beta \text{ dans } [0,1], \text{ on a } \int_\alpha^\beta f' = f(\beta) - f(\alpha)$$

On considère $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ (où $p \in \mathbb{N}^*$) une subdivision de $[\alpha,\beta]$ adaptée à f'.

Soit $i \in [\![1,p]\!]$, on a en changeant éventuellement les valeurs de f' aux bornes : $\displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} f' = f(x_i) - f(x_{i-1})$ en utilisant le théorème fondamental de l'analyse.

Pour démontrer le lemme il suffit d'utiliser la relation de Chasles.

Soit maintenant $s \in [0,1]$, comme $f(0 = f(1) = 0$, on a alors :

$$\mathrm{U}(f)(s) = \int_0^1 k_s'(t)f'(t)\mathrm{d}t = (1-s)\int_0^s f' - s\int_s^1 f' = (1-s)(f(s)-f(0)) - s(f(1)-f(s)) = f(s)$$

d'où $\mathrm{U}(f) = f$

donc $\boxed{\text{U est l'application identité de } \mathrm{E}_1}$

Je suis fort surpris de ne pas utiliser la question précédente !

Q 27.

1. On sait que l'espace préhilbertien $(\mathrm{E}_1, (\cdot \mid \cdot))$ est un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ où I est l'intervalle $[0,1]$
2. Soit $x \in [0,1]$. L'application $\mathrm{V}_x : f \mapsto f(x)$ est une forme linéaire sur E_1.
   Soit $f \in \mathrm{E}_1$. On considère $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ (où $p \in \mathbb{N}^*$) une subdivision de $[0,1]$ adaptée à f' à laquelle on a ajouté x.
   Je note alors $j \in [\![0,p]\!]$ tel que $x_j = x$
   En faisant, comme en Q24 (hypothèses analogues), on peut montrer que

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant \sqrt{(x_i - x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f'(t)\right)^2 \mathrm{d}t} \leqslant \sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f'(t)\right)^2 \mathrm{d}t}$$

En remarquant que $f(x)=\sum_{i=1}^{j}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, on a :

$$|f(x)|\leqslant\sum_{i=1}^{j}\sqrt{(x_i-x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t}\leqslant\sum_{i=1}^{p}\sqrt{x_i-x_{i-1}}\times\sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t}$$

En utilisant Cauchy-Schwarz, cette fois-ci dans $\mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne usuelle, on a :

$$|f(x)|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{p}\left(\sqrt{x_i-x_{i-1}}\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{p}\left(\sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t}\right)^2}=\sqrt{\int_0^1\left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t}$$

Ainsi $\forall f\in \mathrm{E}_1,\ \mathrm{V}_x(f)\leqslant 1\cdot \mathrm{N}(f)$

Comme V_x est linéaire, V_x est continue de $(\mathrm{E}_1,\mathrm{N})$ vers $\mathbb{R}$.

3. Il s'agit de montrer que $\forall x\in \mathrm{I},\ \forall f\in\mathrm{E}_1,\ f(x)=(k_x\mid f)$ où k_x et K sont définies en II et vérifient

$$\forall x,t\in[0,1],\ \mathrm{K}(x,t)=k_x(t)$$

Soit $f\in\mathrm{E}_1$. Soit $x\in[0,1]$. D'après 26, on a :

$$(k_x\mid f)=\int_0^1 k_x'(t)f'(t)\mathrm{d}t=\mathrm{U}(f)(x)=f(x)$$

Ainsi $\boxed{\text{l'espace préhilbertien } (\mathrm{E}_1,(\cdot\mid\cdot)) \text{ est un espace à noyau reproduisant admettant K comme noyau}}$

Remarque : la condition 2 est conséquence de la condition 3 en utilisant Cauchy-Schwarz mais elle est bien utile pour la question suivante.

III.B - Un contre-exemple

Q 28. *L'exemple du cours de la suite de fonctions qui converge pour la norme 2 mais pas simplement m'a inspiré ici.*

Par l'absurde si $(\mathrm{E},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ était un espace à noyau reproduisant.

Alors l'application $\mathrm{V}_1: f\mapsto f(1)$ serait une forme linéaire continue sur l'espace vectoriel normé $(\mathrm{E},\|\cdot\|)$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on considère $f_n: x\mapsto x^n$. On a $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathrm{V}_1(f_n)=1$. De plus

$$\|f_n\|=\sqrt{\int_0^1 (t^n)^2\,\mathrm{d}t}=\frac{1}{2n+1}$$

donc $\|f_n\|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ ainsi $(f_n)_n$ converge vers 0_{E} la fonction nulle sur $[0,1]$.

Par continuité de V_1, on a donc $\mathrm{V}_1(f_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{V}_1(0_{\mathrm{E}})$

Par unicité de la limite $1=0_{\mathrm{E}}(1)=0$ ce qui est absurde

Ainsi $\boxed{(\mathrm{E},\langle\cdot,\cdot\rangle) \text{ n'est pas un espace à noyau reproduisant}}$

III.C - Fonctions développables en série entière

Q 29. Comme la série $\sum(a_n)^2$ est convergente, alors la suite $(a_n^2)_n$ est bornée

donc la suite $(a_n1^n)_n$ est bornée.

Ainsi d'après le lemme d'Abel, $\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum a_nt^n \text{ est supérieur ou égal à 1}}$

Q 30. Nous allons montrer que E_2 est bien un espace vectoriel et que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.

Soit f, g et $h \in \mathrm{E}_2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On considère $(a_n), (b_n)$ et $(c_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de carrés sommables telles que

$$f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \quad \text{et} \quad g : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n \ \text{et} \quad h : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$$

On remarque qu'il y a correspondance bijective entre une fonction de E_2 et la suite de coefficients de la série entière d'après le cours.

Ainsi $(\lambda f + g) : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + b_n)\, t^n$ et seule la suite $(\lambda a_n + b_n)_n$ convient.

E_2 espace vectoriel : On a clairement $\mathrm{E}_2 \subset \mathcal{F}\left(\left]-1,1\right[, \mathbb{R}\right)$ qui est un espace vectoriel.

Il suffit d'établir que E_2 est un sous-espace de $\mathcal{F}\left(\left]-1,1\right[, \mathbb{R}\right)$.

De plus $\mathrm{E}_2 \neq \emptyset$ car la fonction nulle est dans E_2.

Il reste à établir que $\lambda f,\ f+g \in \mathrm{E}_2$ c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (\lambda a_n)^2$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (a_n + b_n)^2$ convergent.

Pour la première série, c'est vrai par linéarité.

Pour la deuxième, on commence par remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n b_n| \leqslant \dfrac{a_n^2 + b_n^2}{2}$ car $(|a_n| - |b_n|)^2 \geqslant 0$.

Ainsi par comparaison entre séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ converge absolument donc converge d'où $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (a_n + b_n)^2$ converge aussi par linéarité.

Forme : À l'aide de l'étape précédente, on voit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ converge.

Ainsi $\langle f, g\rangle$ existe bien dans $\mathbb{R}$.

Caractère symétrique et linéarité : sont évidents.

Caractère positif : Une somme de réels positifs est positive.

Caractère défini : On suppose que $\langle f, f\rangle = 0$. Ainsi $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n)^2 = 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$ (somme de réels positifs) d'où f est la fonction nulle

Conclusion : Ainsi $\boxed{\mathrm{E}_2 \text{ muni de } \langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est un espace préhilbertien réel}}$

Q 31. On pose $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On remarque que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (b_n)^2$ converge en tant que série géométrique de raison $x^{2n} \in \left[0, 1\right[$.

Je pose alors $g_x : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n t^n = \frac{1}{1 - xt}$, ainsi $g_x \in \mathrm{E}_2$.

Soit $f \in \mathrm{E}_2$. On considère $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de carré sommable telle que $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. Alors on a

$$\langle g_x, f\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x)$$

On a trouvé $\boxed{g_x \in \mathrm{E}_2 \text{ tel que pour tout } f \in \mathrm{E}_2,\ f(x) = \langle g_x, f\rangle}$

Q 32. E_2 muni de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un espace préhilbertien réel sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ où I est l'intervalle $]-1,1[$.
Le point 1 est vérifié.
Je note N_2 la norme de l'espace préhilbertien $(E_2,\langle\cdot,\cdot\rangle)$.
Soit $x\in I$. À l'aide de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\forall f\in E_2,\ |V_x(f)|=|f(x)|=|\langle g_x,f\rangle|\leqslant N_2(g_x)\cdot N_2(f)$$

De plus V_x étant linéaire, ainsi V_x est continue. On a établi le point 2.
Le point 3. a alors été établi en Q31. et on a :

$$\forall(x,t)\in(]-1,1[)^2,\ g_x(t)=\frac{1}{1-xt}$$

On peut en déduire que $\boxed{E_2 \text{ est un espace à noyau reproduisant, de noyau : } (x,t)\in]-1,1[^2\longmapsto\dfrac{1}{1-xt}}$

III.D - Autre exemple parmi les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Q 33. On admet que $(E_3,(\cdot\mid\cdot))$ est bien un espace préhilbertien, la preuve se faisant comme en Q23.
Le point 1 est vérifié avec $I=[0,a]$.
La continuité de V_x pour $x\in I$ sera conséquence de 3 en faisant comme en Q 32 avec Cauchy-Schwarz et la caractérisation des applications linéaires continues.
Soit $x\in[0,a]$ et $f\in E_3$. Pour le point 3, on pose $k_x:t\mapsto\min(x,t)$ et il suffit d'établir que

$$k_x\in E_3\quad\text{et}\quad f(x)=(k_x\mid f)$$

or on a $\forall t\in[0,x],\ k_x(t)=t$ et $\forall t\in[x,a],\ k_x(t)=x$
donc la fonction k_x est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux et

$$\forall t\in[0,x[,\ k_x'(t)=1\quad\text{et}\quad\forall t\in]x,a],\ k_x'(t)=0$$

De plus $k_x(0)=0$ d'où $k_x\in E_3$.
Ainsi, en utilisant le lemme établi en Q26 :

$$(k_x\mid f)=\int_0^a f'(t)k_x'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t+\int_x^a 0\mathrm{d}t=f(x)-f(0)=f(x)$$

Ainsi $\boxed{\text{la fonction } (x,y)\mapsto\min(x,y) \text{ est un noyau reproduisant sur } (E_3,(\cdot\mid\cdot))}$

Q 34. Comme $\varphi'<0$ et $\varphi(a)=0$ alors φ est continue et strictement décroissante sur $[0,a]$
donc φ induit une bijection de $[0,a]$ vers $[\varphi(a),\varphi(0)]=[0,\alpha]$ en notant $\alpha=\varphi(0)>0$.
Je note alors $F:[0,\alpha]\longrightarrow[0,a]$ la bijection réciproque qui est strictement décroissante et dérivable car φ' ne s'annule pas. Et comme $\forall t\in[0,\alpha]$, $F'(t)=\dfrac{1}{\varphi'(F(t))}$ on voit que F' est continue par composition.
Ainsi F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Je considère l'espace E_3 de la question précédente mais en remplaçant a par α c'est-à-dire que E_3 est l'espace des fonctions continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,\alpha]$ avec le produit scalaire défini par :

$$\forall f,g\in E_3,\ (f\mid g)=\int_0^\alpha f'g'.$$

On a ainsi un espace préhilbertien à noyau de noyau $(x,y)\in[0,\alpha]\mapsto\min(x,y)$

Je considère alors l'application :

$$\Lambda \;:\; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E}_4 & \longrightarrow & \mathrm{E}_3 \\ f & \longmapsto & f \circ \mathrm{F} \end{array} \right.$$

Il s'agit dans un premier temps de montrer que Λ est bien définie. Soit $f \in \mathrm{E}_4$.
Comme $f : [0,a] \mapsto \mathbb{R}$ et $\mathrm{F} : [0,\alpha] \longrightarrow [0,a]$ sont continues alors $f \circ \mathrm{F}$ est bien continue sur $[0,\alpha]$
De plus $f \circ \mathrm{F}(0) = f(\mathrm{F}(0)) = f(a) = 0$.
On considère alors $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) une subdivision de $[0,a]$ adaptée au caractère $\mathcal{C}^1$ par morceaux de f alors $(\varphi(x_{p-i}))_{0 \leqslant i \leqslant p}$ est une subdivision de $[0,\alpha]$ et par composition cette subdivision est adaptée au caractère $\mathcal{C}^1$ par morceaux de $f \circ \mathrm{F}$.
Donc Λ est bien définie.
De plus Λ est clairement linéaire et bijective de bijection réciproque $g \in \mathrm{E}_3 \mapsto g \circ \varphi \in \mathrm{E}_4$.
Ainsi Λ est un isomorphisme.
Je pose alors pour f et $g \in \mathrm{E}_4$,

$$\forall f, g \in \mathrm{E}_4,\; < f \mid g >= (\Lambda(f) \mid \Lambda(g)) = \int_0^{\alpha} (f \circ \mathrm{F})' \cdot (g \circ \mathrm{F})'$$

où $(\cdot \mid \cdot)$ est le produit scalaire de la question précédente.
En exploitant l'isomorphisme, on montre facilement que $< \cdot \mid \cdot >$ est un produit scalaire sur E_4.
Je note $\mathrm{L} : (x,y) \longmapsto \min(\varphi(x), \varphi(y))$ et pour $x \in [0,\alpha]$, je pose $\ell_x : t \mapsto \mathrm{L}(x,t)$
Le point 1 étant vrai avec $\mathrm{I} = [0,a]$ et le point 2 étant conséquence du point 3, il reste à établir que L est un noyau reproduisant sur l'espace préhilbertien E_4 c'est-à-dire :

$$\forall x \in [0,a],\; \forall f \in \mathrm{E}_4,\; \ell_x \in \mathrm{E}_4 \;\text{ et }\; < \ell_x \mid f >= f(x)$$

Soit $f \in \mathrm{E}_4$ et $x \in [0,a]$. En remarquant que $\varphi\left([0,a]\right) = [0,\alpha]$, on a :

$$\forall t \in [0,a],\; \ell_x(t) = \min(\varphi(x), \varphi(t)) = k_{\varphi(x)}\left(\varphi(t)\right)$$

donc $\ell_x = k_{\varphi(x)} \circ \varphi = \Lambda^{-1}\left(k_{\varphi(x)}\right) \in \mathrm{E}_4$ car $k_{\varphi(x)} \in \mathrm{E}_3$. Puis

$$< \ell_x \mid f >= \left(\Lambda\left(\ell_x\right) \mid \Lambda(f)\right) = \left(k_{\varphi(x)} \mid f \circ \mathrm{F}\right) = f \circ \mathrm{F}\left(\varphi(x)\right) = f(x)$$

ainsi $\boxed{(f,g) \longmapsto \int_0^{\varphi(0)} \left(f \circ \varphi^{-1}\right)' \cdot \left(f \circ \varphi^{-1}\right)' \text{ est un produit scalaire sur } \mathrm{E}_4 \text{ tel que la fonction } (x,y) \mapsto \min(\varphi(x), \varphi(y)) \text{ soit un noyau reproduisant sur l'espace préhilbertien } \mathrm{E}_4}$

IV Quelques résultats sur les espaces à noyau reproduisant

IV.A - Continuité

Q 35. Soit $f \in \mathrm{E}$ tel que $\|f\| = 1$. À l'aide Cauchy-Schwarz, on a :

$$|f(x)| = |\langle f, k_x \rangle| \leqslant \|f\| \cdot \|k_x\| = \sqrt{\langle k_x, k_x \rangle}$$

d'où l'existence des membres et l'inégalité : $0 \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{V}_x) = \sup\limits_{\|f\|=1} |f(x)| \leqslant \sqrt{\langle k_x, k_x \rangle}$

Si $k_x = 0_{\mathrm{E}}$, alors $\mathrm{N}(\mathrm{V}_x) = 0 = \sqrt{\langle k_x, k_x \rangle}$

Si $k_x \neq 0_{\mathrm{E}}$, alors $g = \dfrac{1}{\sqrt{\langle k_x, k_x\rangle}} k_x$ est de norme 1 et

$$\mathrm{V}_x(g) = \frac{1}{\sqrt{\langle k_x, k_x\rangle}} k_x(x) = \frac{\langle k_x, k_x\rangle}{\sqrt{\langle k_x, k_x\rangle}}$$

Dans tous les cas, il s'agit d'un maximum et on a $\boxed{\mathrm{N}(\mathrm{V}_x) = \sqrt{\langle k_x, k_x\rangle}}$

Q 36. On remarque tout d'abord que

$$\forall x, y \in \mathrm{I},\ \mathrm{K}(x,y) = k_x(y) = \langle k_x, k_y\rangle = \mathrm{K}(y,x)$$

Soit $f \in \mathrm{E}$ et $x \in \mathrm{I}$. Il s'agit d'établir que $\lim\limits_{y\to x} f(y) = f(x)$ pour obtenir la continuité de f en x.

Soit $y \in \mathrm{I}$. On a, avec Cauchy-Schwarz,

$$|f(x) - f(y)| = |\langle k_x, f\rangle - \langle k_y, f\rangle| = |\langle k_x - k_y, f\rangle| \leqslant \|k_x - k_y\| \cdot \|f\|$$

Puis

$$\|k_x - k_y\|^2 = \langle k_x, k_x\rangle + \langle k_y, k_y\rangle - 2\langle k_x, k_y\rangle = \mathrm{K}(x,x) + \mathrm{K}(y,y) - 2\mathrm{K}(x,y)$$

Or K est continue sur I^2 et $(x,x) = \lim\limits_{y\to x}(y,y) = \lim\limits_{y\to x}(x,y)$ donc

$$\lim_{y\to x}\|k_x - k_y\| = \sqrt{\lim_{y\to x}\left(\mathrm{K}(x,x) + \mathrm{K}(y,y) - 2\mathrm{K}(x,y)\right)} = \sqrt{\mathrm{K}(x,x) + \mathrm{K}(x,x) - 2\mathrm{K}(x,x)} = 0$$

D'où par théorème des gendarmes : $\lim\limits_{y\to x} f(y) = f(x)$.

Ainsi f est continue en tout point de I donc f est continue sur I.

D'où $\boxed{\text{toutes les fonctions de E sont continues}}$

IV.B - Construction d'un espace à noyau reproduisant

Q 37. Montrons au préalable que $\mathrm{T} : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ est bien définie

Soit $f \in \mathrm{E}$. Je note $\mathrm{F} : (x,t) \in [0,1]^2 \longmapsto \mathrm{A}(x,t)f(t) \in \mathbb{R}$.

Ainsi F et continue sur $[0,1]^2$.

Pour tout $t \in [0,1]$, $x \mapsto \mathrm{F}(x,t)$ est continue sur $[0,1]$ (i)

Pour tout $x \in [0,1]$, $t \mapsto \mathrm{F}(x,t)$ est continue sur $[0,1]$ (ii)

$[0,1]^2$ étant compact (produit de compacts), le théorème des bornes atteintes nous fournit $\mathrm{M} > 0$ tel que

$$\forall (x,t) \in [0,1]^2,\ |\mathrm{F}(x,t)| \leqslant m$$

L'hypothèse de domination est vérifiée car $t \longmapsto \mathrm{M}$ est continue donc intégrable sur le segment $[0,1]$ (iii)

Avec (i), (ii) et (iii), on a par théorème de cours : $\mathrm{T}(f)x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \mathrm{F}(x,t)\mathrm{d}t$ définie et continue sur $[0,1]$.

Donc $\mathrm{T}(f) \in \mathrm{E}$. La linéarité étant évidente, on a bien

$$\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$$

Comme $\ker \mathrm{T}$ est de dimension finie, alors $(\ker \mathrm{T})^{\perp}$ est un supplémentaire de $\ker \mathrm{T}$

donc selon le lemme du théorème du rang, $\boxed{\mathrm{T} \text{ induit un isomorphisme de } (\ker \mathrm{T})^{\perp} \text{ sur } \mathrm{Im}\,\mathrm{T}}$

Q 38. $\left((\ker \mathrm{T})^{\perp}, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ est un espace préhilbertien réel où le produit scalaire est induit par celui sur E et $\mathrm{S} \in \mathcal{L}\left(\operatorname{Im}\mathrm{T}, (\ker\mathrm{T})^{\perp}\right)$ est un isomorphisme. Ainsi comme en Q34, on obtient que

$$(\operatorname{Im}\mathrm{T}, \varphi) \text{ est un espace préhilbertien réel}$$

et on a $\operatorname{Im}\mathrm{T} \subset \mathrm{E} \subset \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$, le point 1 est vérifié.

Soit $f \in \operatorname{Im}\mathrm{T}$ et $x \in [0,1]$. Je note $k_x : y \in [0,1] \longmapsto \mathrm{K}(x,y)$. Comme en Q33, pour vérifier les points 2 et 3, il suffira d'établir que

$$k_x \in \operatorname{Im}\mathrm{T} \quad \text{et} \quad f(x) = \varphi(k_x, f)$$

Je pose $h_x : t \in [0,1] \longmapsto \mathrm{A}(x,t)$.
Comme A est continue sur $[0,1]^2$, alors $h_x \in \mathrm{E}$ et

$$\forall y \in [0,1],\ k_x(y) = \mathrm{K}(x,y) = \int_0^1 \mathrm{A}(x,t)\mathrm{A}(y,t)\mathrm{d}t = \int_0^1 h_x(t)\mathrm{A}(y,t)\mathrm{d}t = \mathrm{T}(h_x)(y)$$

Ainsi on a $k_x = \mathrm{T}(h_x) \in \operatorname{Im}\mathrm{T}$ et au passage on a vérifié que <u>K est bien définie</u>.

On a alors

$$\varphi(k_x, f) = \langle \mathrm{S}\circ\mathrm{T}(h_x), \mathrm{S}(f)\rangle = \langle h_x, \mathrm{S}(f)\rangle = \int_0^1 \mathrm{A}(x,t)\cdot\mathrm{S}(f)(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{T}(\mathrm{S}(f))(x) = f(x)$$

Ainsi $\boxed{(\operatorname{Im}\mathrm{T}, \varphi) \text{ est un espace à noyau reproduisant, de noyau K}}$

• • • FIN • • •
