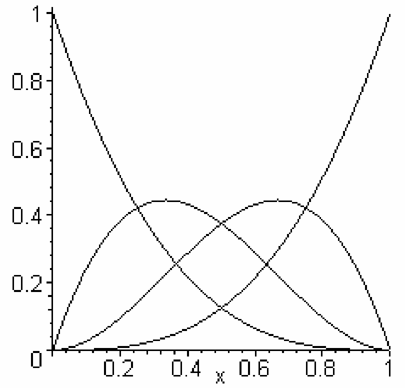
Correction

1. $B_{3,0}(x)=(1-x)^3$, $B_{3,1}(x)=3x(1-x)^2$, $B_{3,2}(x)=B_{3,1}(1-x)$ et $B_{3,3}(x)=x^3$.



2.a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}=(X+1-X)^n=1$.

$\forall x\in[0,1],\forall k\in[\![0,n]\!],B_{n,k}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\geq 0$

donc $B_{n,k}(x)\leq\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n}B_{n,\ell}(x)=1$.

2.b Rappelons $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$.

$$\sum_{k=0}^{n}kB_{n,k}=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}X^k(1-X)^{n-k}\underset{\ell=k-1}{=}nX\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}X^\ell(1-X)^{n-1-\ell}=nX\sum_{\ell=0}^{n-1}B_{n-1,\ell}=nX.$$

Comme ci-dessus : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k-1)B_{n,k}=nX\sum_{\ell=0}^{n-1}(\ell-1)B_{n-1,\ell}=n(n-1)X^2$

et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2B_{n,k}=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)B_{n,k}+\sum_{k=0}^{n}kB_{n,k}=n(n-1)X^2+nX=nX((n-1)X+1)$.

3. $B'_{n,k}=k\binom{n}{k}X^{k-1}(1-X)^{n-k}-(n-k)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k-1}$ or pour $k\neq 0$ et $k\neq n$,

$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$ et $(n-k)\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}$ donc $B'_{n,k}=n(B_{n-1,k-1}-B_{n-1,k})$.

Quand $k=0$, $B'_{n,k}=-nB_{n-1,k}$ et quand $k=n$, $B'_{n,k}=nB_{n-1,k-1}$.

4. Supposons $\lambda_0B_{n,0}+\lambda_1B_{n,1}+\cdots+\lambda_nB_{n,n}=0$.
En évaluant la relation en 0, on obtient $\lambda_0=0$.
On obtient alors la relation $\lambda_0B_{n,0}+\lambda_1B_{n,1}+\cdots+\lambda_{n-1}B_{n,n-1}=0$.
On peut simplifier celle-ci par X et évaluer à nouveau en 0, pour obtenir $\lambda_1=0$.
On reprend ce procédé et on obtient successivement $\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$.
La famille $(B_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ est une famille.
De plus celle-ci est formée de $n+1=\dim\mathbb{R}_n[X]$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ (car $\deg B_{n,k}=n$), c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5.a Comme $B_{n,k}\in\mathbb{R}_n[X]$, on a immédiatement $B(P)\in\mathbb{R}_n[X]$. Ainsi $B:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X]$.
Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $P,Q\in\mathbb{R}_n[X]$.
On a $\displaystyle B(\alpha P+\beta Q)=\sum_{k=0}^{n}(\alpha P+\beta Q)\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}=\alpha\sum_{k=0}^{n}P\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}+\beta\sum_{k=0}^{n}Q\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}=\alpha B(P)+\beta B(Q)$.
Ainsi B est linéaire et c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

5.b Soit $P\in\ker B$. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}=0$. Or $(B_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ est libre donc $P\left(\frac{k}{n}\right)=0$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$.
Le polynôme possède alors au moins $n+1$ racines, or $\deg P\leq n$ donc $P=0$.
Ainsi $\ker B=\{0\}$. L'endomorphisme B est donc injectif, or $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie donc B est un automorphisme.

Partie II

1. Si $f(x)=1$ alors $P_n(x)=1\to 1=f(x)$.
Si $f(x)=x$ alors $P_n(x)=x\to x=f(x)$.
Si $f(x)=x^2$ alors $P_n(x)=\dfrac{x((n-1)x+1)}{n}\to x^2=f(x)$.

2.a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x)=x^2\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}(x)-\frac{2x}{n}\sum_{k=0}^{n}kB_{n,k}(x)+\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2B_{n,k}(x)$
donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x)=x^2-2x^2+\frac{x((n-1)x+1)}{n}=\frac{x(1-x)}{n}$.

2.b $\displaystyle\alpha^2\sum_{k\in B}B_{n,k}(x)\le\sum_{k\in B}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}\le\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}=\frac{x(1-x)}{n}$ donc $\displaystyle\sum_{k\in B}B_{n,k}(x)\le\frac{x(1-x)}{na^2}$.
De plus, une étude fonctionnelle donne $x(1-x)\le 1/4$ sur $[0,1]$.

2.c $\displaystyle\left|P_n(x)-f(x)\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}(x)-\sum_{k=0}^{n}f(x)B_{n,k}(x)\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)B_{n,k}(x)\right|$
donc $\displaystyle\left|P_n(x)-f(x)\right|\le\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_{n,k}(x)=\sum_{k\in A}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_{n,k}(x)+\sum_{k\in B}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_{n,k}(x)$
or $\displaystyle\sum_{k\in A}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_{n,k}(x)\le\sum_{k\in A}\frac{\varepsilon}{2}B_{n,k}(x)=\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}(x)=\frac{\varepsilon}{2}$
et $\displaystyle\sum_{k\in B}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_{n,k}(x)\le\sum_{k\in B}\left(\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|+\left|f(x)\right|\right)B_{n,k}(x)\le\sum_{k\in B}2MB_{n,k}(x)\le\frac{M}{2n\alpha^2}$
donc $\displaystyle\left|P_n(x)-f(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2n\alpha^2}$.
Notons que $M<+\infty$ car f est continue sur un segment donc y est bornée.
Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\ge N$ on ait $\dfrac{M}{2n\alpha^2}\le\dfrac{\varepsilon}{2}$ car $\dfrac{M}{2n\alpha^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
Suite à ce raisonnement, on a : $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\ge N,\left|P_n(x)-f(x)\right|\le\varepsilon$.
On peut donc dire que $P_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(x)$.

3.a $\displaystyle P_n'(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}'(x)=-nf(0)B_{n-1,0}'(x)+n\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\left(B_{n-1,k-1}(x)-B_{n-1,k}(x)\right)+nf(1)B_{n-1,n-1}'(x)$.
Par réorganisation de la somme : $\displaystyle P_n'(x)=n\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n-1,k}(x)$.

3.b Si f est croissante alors pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, $f\left(\dfrac{k+1}{n}\right)\ge f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ donc $P_n'(x)\ge 0$ puis P_n croît.