

Fonctions Vectorielles à variable réelle

On s'intéressera dans ce chapitre aux fonctions définies sur un intervalle de \mathbb{R} à valeurs dans un e.v.n de dimension finie.

$$\begin{aligned} f: I &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto f(t) \in E \end{aligned}$$

Pensez par exemple aux situations :

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}^n ; f(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

$$f: I \rightarrow \mathbb{C} ; f(t) = f_1(t) + i f_2(t) \in \mathbb{C}$$

$$f: I \rightarrow M_2(\mathbb{R}) ; f(t) = \begin{pmatrix} a(t) & c(t) \\ b(t) & d(t) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

I) Dérivation

1) Dérivation d'une fonction vectorielle

Déf 1

Soit $f: I \longrightarrow E$, où I intervalle de \mathbb{R} et E un e.v.n de dimension finie.

Soit $a \in I$.

1) On dit que f est dérivable en a si et si l'application

$h \mapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ possède une limite $l \in E$ quand h tend vers 0 .

2) Dans ce cas, l se note $f'(a)$ et s'appelle le vecteur dérivé de f en a . □

$$f'(a) \stackrel{\text{d'f}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Prop 2

Soit $f: I \rightarrow E$, où I intervalle de \mathbb{R} et E un evn de dimension finie.

Soit $a \in I$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) f est dérivable en a

2) Il existe $l \in E$ et une fonction $\varepsilon: I \rightarrow E$ tels que :

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot l + h \cdot \varepsilon(h)$$
$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

Vocabulaire

Cette expression s'appelle le développement limité de f en a à l'ordre 1.

Corollaire 3

f dérivable en $a \Rightarrow f$ continue en a .

Démo

Supp que f dérivable en a .

$$\text{Alors } \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a) + h \cdot l + h \cdot \varepsilon(h) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où } \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$$

Çaol f continue en a .

□

Attention !

La réciproque est en général fautive.

Contre-exemple (très connu)

$f: x \mapsto |x|$; f continue en 0 mais n'y est pas dérivable.

car $f'_d(0) \neq f'_g(0)$:

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \quad f'_g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

□

Déf 4 (Dérivabilité à droite)

$f: I \longrightarrow E$ et $a \in I$.

- 1) On dit que f est dérivable à droite en a si et ssi l'application $h \longmapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ possède une limite $l \in E$ quand h tend vers 0^+ .
- 2) Dans ce cas, l se note $f'_d(a)$ et s'appelle le vecteur dérivé à droite de f en a .

Déf 5 (Dérivabilité à gauche)

$f: I \longrightarrow E$ et $a \in I$.

- 1) On dit que f est dérivable à gauche en a si et ssi l'application $h \longmapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ possède une limite $l \in E$ quand h tend vers 0^- .
- 2) Dans ce cas, l se note $f'_g(a)$ et s'appelle le vecteur dérivé à gauche de f en a .

Prop 6

$f: I \longrightarrow E$ et a un point intérieur de I .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) f est dérivable en a

2) $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ dérivable à droite et à gauche en } a. \\ \text{et} \\ f'_d(a) = f'_g(a) \end{array} \right.$

Déf 7

$f: I \longrightarrow E$.

1) f est dite dérivable sur I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I .

2) Supposons que f est dérivable sur I .

L'application $f': I \rightarrow E$ s'appelle l'application
 $t \mapsto f'(t)$

dérivée de f .

2) Lim avec les fonctions Composantes

E étant un \mathbb{R} -en de dimension finie.

Notons $n = \dim(E) \geq 1$.

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

$f: I \rightarrow E$.

$$f = f_1 e_1 + \dots + f_n e_n = \sum_{i=1}^n f_i e_i$$

f_1, \dots, f_n sont les fonctions composantes de f dans la base B

Prop

1) Soit $a \in I$.

f est dérivable en a (resp sur I) si et ssi toutes ses fonctions composantes le sont.

2) Dans ce cas, on a :

$$i) f'(a) = \sum_{i=1}^n f'_i(a) e_i$$

$$ii) \forall x \in I, f'(x) = \sum_{i=1}^n f'_i(x) e_i$$

Démo :

1) Soit $a \in I$.

$$f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$$

$$f(a+h) = \sum_{i=1}^n f_i(a+h) e_i \quad \text{et} \quad f(a) = \sum_{i=1}^n f_i(a) e_i$$

$$\forall h \neq 0, \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \sum_{i=1}^n \frac{f_i(a+h) - f_i(a)}{h} \cdot e_i$$

D'où :

$$f \text{ dérivable en } a \stackrel{\text{def}}{\iff} \left(h \mapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ admet une limite } l \in E \text{ quand } h \rightarrow 0 \right)$$

$$\iff \left(\forall 1 \leq i \leq n, h \mapsto \frac{f_i(a+h) - f_i(a)}{h} \text{ admet une limite } l_i \in K \text{ quand } h \rightarrow 0 \right)$$

$$\iff (\forall 1 \leq i \leq n, f_i \text{ est dérivable en } a)$$

2) ii)

Et si f est dérivable en a , on aura :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n \frac{f_i(a+h) - f_i(a)}{h} \cdot e_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(a+h) - f_i(a)}{h} \right) \cdot e_i$$

$$= \sum_{i=1}^n f'_i(a) e_i$$

□

On conclut rapidement la dérivabilité sur I ... □

Exemples rapides

1) $f: I \rightarrow \mathbb{C}$; $f(t) = \underbrace{\operatorname{Re}(f(t))}_{=f_1(t)} + i \underbrace{\operatorname{Im}(f(t))}_{=f_2(t)}$

On a :

i) f dérivable sur $I \Leftrightarrow \operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont.

ii) Dans ce cas, on a :

$$\forall t \in I, f'(t) = f_1'(t) + i f_2'(t)$$

2) $\forall \theta \in \mathbb{R}, t \mapsto e^{i\theta t}$ est dérivable sur \mathbb{R} , et on a :

$$(e^{i\theta t})' = i\theta \cdot e^{i\theta t}$$

3) $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$; $f(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$.

i) f dérivable sur $I \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n)$ le sont

ii) Dans ce cas, on a :

$$\forall t \in I, f'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t)) \in \mathbb{R}^n$$

4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est dérivable sur \mathbb{R} , et on a :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (\sinh t + t, e^{2t}) \end{cases}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = (\cosh t + 1, 2e^{2t}) \in \mathbb{R}^2$$

5) $f: \mathbb{R} \rightarrow M_2(\mathbb{R})$; $f(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & e^{-t} \\ \cosh t & t^2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}^2)$.

f est dérivable sur \mathbb{R} car ses quatre fonctions composantes le sont, et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \begin{pmatrix} \sinh t & -e^{-t} \\ -\sinh t & 2t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}^2).$$

□

3) Opérations sur les fonctions vectorielles

Prop 1 (Combinaison linéaire)

Soient $f, g: I \rightarrow E$ et $a \in I$.

Soient $\alpha, \beta \in K$.

1) Si f et g sont dérivables en a (resp sur I) alors $(\alpha f + \beta g)$ l'est aussi.

2) Dans ce cas on a :

$$\text{i) } (\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

$$\text{ii) } \forall x \in I, (\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

Démo :

1) i) Supp que f et g sont dérivables en a .

M que $(\alpha f + \beta g)$ est dérivable en a , et qu'on a :

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a).$$

Pour tout $h \neq 0$, on a :

$$\frac{(\alpha f + \beta g)(a+h) - (\alpha f + \beta g)(a)}{h} = \alpha \underbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{\rightarrow f'(a)} + \beta \underbrace{\frac{g(a+h) - g(a)}{h}}_{\rightarrow g'(a)}$$

Par passage à la limite, on tire que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\alpha f + \beta g)(a+h) - (\alpha f + \beta g)(a)}{h} = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

D'où le résultat voulu. \square

Sur I découle de 1)i) et 2)i) \square

Notation

$\mathcal{D}(I, E)$: l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans E .

Corollaire 2

1) $\mathcal{D}(I, E)$ est un sev de $\mathcal{F}(I, E)$.

2) L'application suivante est linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(I, E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(I, E) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

Prop 3 (Composée)

Soient $g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $f: J \rightarrow E$, où I et J intervalles de \mathbb{R} .

Supposons que $\begin{pmatrix} g \text{ dérivable sur } I \\ f \text{ dérivable sur } J \\ g(I) \subset J \end{pmatrix}$. On a :

i) $f \circ g$ est dérivable sur I .

$$\text{ii) } \forall t \in I, (f \circ g)'(t) = \underbrace{g'(t)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{f'(g(t))}_{\in E}$$

Démo :

Supposons que $\begin{pmatrix} g \text{ dérivable sur } I \\ f \text{ dérivable sur } J \\ g(I) \subset J \end{pmatrix}$

Posons $f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) e_i$ (alors $f'(t) = \sum_{i=1}^n f_i'(t) e_i$)

On a $(f \circ g)(t) = \sum_{i=1}^n (f_i \circ g)(t) e_i$

Ainsi, $f \circ g$ est dérivable sur I , car ses fonctions composantes

$(f_i \circ g)$ le sont, comme composées de f_i et g qui sont dérivables sur I .

En plus, pour tout $t \in I$, on a :

$$(f \circ g)'(t) = \sum_{i=1}^n (f_i \circ g)'(t) \cdot e_i$$

$$= \sum_{i=1}^n g'(t) \cdot f_i'(g(t)) e_i$$

$$= g'(t) \cdot \sum_{i=1}^n f_i'(g(t)) e_i$$

$$= g'(t) \cdot f'(g(t)) \quad \square$$

$$f'(t) = \sum_{i=1}^n f_i'(t) e_i$$

Prop 4

E et F deux evn de dimension finies.

$$\text{Si } \left(\begin{array}{l} f: I \rightarrow E \text{ dérivable} \\ L \in \mathcal{L}(E, F) \end{array} \right)$$

$$\text{alors } \left(\begin{array}{l} L \circ f \text{ est dérivable sur } I \\ \forall t \in I, (L \circ f)'(t) = L(f'(t)) \end{array} \right)$$

Démo

Soient $f \in \mathcal{D}(I, E)$ et $L \in \mathcal{L}(E, F)$.

Al que $(L \circ f) \in \mathcal{D}(I, F)$.

Soit alors $a \in I$. Al que $(L \circ f)$ est dérivable en a et que :

$$(L \circ f)'(a) = L(f'(a))$$

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(L \circ f)(a+h) - (L \circ f)(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(f(a+h)) - L(f(a))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} L \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) \\ &\quad \searrow \text{car } L \text{ est linéaire} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a), \text{ car } f \text{ dérivable en } a \quad (f \in \mathcal{D}(I, E))$$

et que L continue sur E comme application linéaire et E d'infini

Donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} L \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = L(f'(a))$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(L \circ f)(a+h) - (L \circ f)(a)}{h} = L(f'(a))$$

Exemple 1

Soit $A: \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ dérivable.

Justifier que $f: t \mapsto t(A(t))$ est dérivable sur \mathbb{R} et préciser $f'(t)$.

Si $\left(\begin{array}{l} f: I \rightarrow E \text{ dérivable} \\ L \in \mathcal{L}(E, F) \end{array} \right)$

Alors $\left(\begin{array}{l} (L \circ f) \text{ est dérivable sur } I \\ \forall t \in I, (L \circ f)'(t) = L(f'(t)) \end{array} \right)$

Rappel

Sol

On a $\left\{ \begin{array}{l} A: \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R}) \text{ dérivable} \\ tr \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}) \end{array} \right.$

D'où le composé ($\text{tr} \circ A = f$) est dérivable sur \mathbb{R}

Et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \text{tr}(A'(t))$$

$$(L \circ f)'(t) = L(f'(t))$$

Exercice 2

Soit $A: \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ dérivable.

Justifier que $f: t \mapsto {}^t A(t)$ est dérivable sur \mathbb{R}
et préciser $f'(t)$.

Prop 5 (Produit)

E, F et G trois evn de dimensions finies.

Si $f \in \mathcal{D}(I, E)$ et $g \in \mathcal{D}(I, F)$.

$B: E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire.

Alors l'application $B(f, g): t \in I \mapsto B(f(t), g(t)) \in G$ est dérivable sur I , et on a :

$$\forall t \in I, (B(f, g))'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$$

Démo

Supp que $f \in \mathcal{D}(I, E)$ et $g \in \mathcal{D}(I, F)$.

$B: E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire.

Al que $B(f, g)$ est dérivable sur I .

Soit $t \in I$.

On suppose que $B(f, g)$ est dérivable en t , et qu'on a :

$$(B(f, g))'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$$

Soit $h \neq 0$. On a :

$$\frac{B(f, g)(t+h) - B(f, g)(t)}{h} = \frac{B(f(t+h), g(t+h)) - B(f(t), g(t))}{h}$$

$$= \frac{B(f(t+h) - f(t) + f(t), g(t+h)) - B(f(t), g(t))}{h}$$

$$= \frac{B(f(t+h) - f(t), g(t+h)) + B(f(t), g(t+h)) - B(f(t), g(t))}{h}$$

$$= \frac{B(f(t+h) - f(t), g(t+h)) + B(f(t), g(t+h) - g(t))}{h}$$

$$= B\left(\underbrace{\frac{f(t+h) - f(t)}{h}}_{\rightarrow f'(t)}, \underbrace{g(t+h)}_{\rightarrow g(t)}\right) + B\left(f(t), \underbrace{\frac{g(t+h) - g(t)}{h}}_{\rightarrow g'(t)}\right)$$

$\xrightarrow{h \rightarrow 0} B(f'(t), g(t))$ $\xrightarrow{h \rightarrow 0} B(f(t), g'(t))$

Car B continue, puis que bilinéaire en dimension finie

Car B continue.

Par passage à la limite quand h tend vers 0, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{B(f, g)(t+h) - B(f, g)(t)}{h} = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$$

D'où la conclusion. \square

Corollaire 6

$$\text{Si } \left| \begin{array}{l} \alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{I}, \mathbb{K}) \\ f \in \mathcal{D}(\mathbb{I}, E) \end{array} \right.$$

$$\text{Alors } \left| \begin{array}{l} \alpha f \in \mathcal{D}(\mathbb{I}, E) \end{array} \right.$$

$$\forall t \in \mathbb{I}, (\alpha f)'(t) = \alpha'(t) \cdot f(t) + \alpha(t) \cdot f'(t)$$

Démo

D'après la (prop 5) et l'application bilinéaire :

$$B: \mathbb{K} \times E \rightarrow E \\ (t, x) \mapsto t \cdot x$$

Corollaire 6

Soit $(E, +, \cdot, \|\cdot\|)$ une algèbre normée.

$$\text{Si } f \text{ et } g \in \mathcal{D}(\mathbb{I}, E)$$

$$\text{Alors } \left| \begin{array}{l} f \times g \in \mathcal{D}(\mathbb{I}, E) \end{array} \right.$$

$$\forall t \in \mathbb{I}, (f \times g)'(t) = f'(t) \times g(t) + f(t) \times g'(t)$$

Démo

D'après la (prop 5) et l'application bilinéaire :

$$B: E \times E \rightarrow E \\ (x, y) \mapsto x \times y$$

Exemple rapide

Soient A et $B \in \mathcal{D}(I, M_n(\mathbb{R}))$.

L'application $t \mapsto A(t) \cdot B(t)$ est dérivable sur I , et on a :

$$(A(t) \cdot B(t))' = A'(t) \cdot B(t) + A(t) \cdot B'(t)$$

Corollaire 7

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Si f et $g \in \mathcal{D}(I, E)$

Alors $\left| \begin{array}{l} \langle f, g \rangle : t \mapsto \langle f(t) | g(t) \rangle \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \\ \langle f(t) | g(t) \rangle' = \langle f'(t) | g(t) \rangle + \langle f(t) | g'(t) \rangle \end{array} \right.$

Démo

D'après la (prop 5) et l'application bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Exemple rapide

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathcal{D}(I, E)$.

L'application $t \mapsto \|f(t)\|^2$ est dérivable sur I , et on a :

$$(\|f(t)\|^2)' = 2 \langle f'(t) | f(t) \rangle$$

4) Dérivées d'ordre supérieures

Les dérivées successives se définissent d'une manière analogue à ce qu'on a vu au Sup pour les fonctions réelles ou complexes.

$\mathcal{D}^n(I, E)$: désignera l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I .

$C^n(I, E)$: désignera l'ensemble des fonctions de classe C^n sur I .

$C^\infty(I, E)$: désignera l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I .

N.B :

Les propriétés vues pour les fonctions dérivables valent aussi pour les fonctions de classe C^n , où $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Prop

$n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

- 1) f de classe C^n sur I si et ssi toutes ses fonctions composantes le sont.
- 2) $C^n(I, E)$ est un sev de $\mathcal{F}(I, E)$.

3) Si $\begin{pmatrix} g \in C^n(I, \mathbb{R}) \\ f \in C^n(J, E) \\ g(I) \subset J \end{pmatrix}$ alors $f \circ g \in C^n(I, E)$

Exemple rapide

$f: \mathbb{R} \rightarrow M_2(\mathbb{R}) ; t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} \cos t & e^{-t} \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , car ses fonctions composantes

li sont.

En plus :

$$\forall n \geq 3, f^{(n)}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t + n \frac{\pi}{2}) & (-1)^n e^{-t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad \square$$

Rappels

$$\cos^{(n)}(t) = \cos(t + \frac{n\pi}{2}) \quad \star$$

$$\sin^{(n)}(t) = \sin(t + \frac{n\pi}{2}) \quad \star$$

$$(e^{\lambda t})^{(n)} = \lambda^n \cdot e^{\lambda t}$$

I) Intégration

1) Fonctions vectorielles continues par morceaux (CFM)

$B = (e_1, \dots, e_n)$ étant une base de E , et I un intervalle de \mathbb{R} .

Soit $f \in \mathcal{F}(I, E)$.

Def

f est dite continue par morceaux sur I si et seulement si toutes ses fonctions composantes le sont.

2) Intégration sur un segment d'une fonction vectorielle

Déf 1

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} .

Soit $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$ continue par morceaux sur $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(x) dx \right) \cdot e_i$$

NB

Cette intégrale ne dépend pas de la base (e_i) choisie.

Prop 2 (Linéarité de l'intégrale)

Soient f, g CPM sur I à valeurs dans E .

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $a, b \in I$. On a

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Démo

Via les fonctions composantes et la linéarité de l'intégrale des fonctions réelle ou complexes.

Prop 3 (Relation de Chasles)

Soient f CPM sur I à valeurs dans E et $a, b, c \in I$. On a :

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

Démo

Via les fonctions composantes ...

3) Sommes de Riemann

Prop 1

Soit $f: [a, b] \rightarrow E$ CPM. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \right) = \int_a^b f(x) dx$$

NB

On a aussi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \right) = \int_a^b f(x) dx$$

Démo

Via les fonctions composantes de f , et les sommes de Riemann appliquées à celles-ci.

Cas particulier fréquent

Soit $f: [0,1] \rightarrow E$ CPM. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x) dx$$

NB

On a aussi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x) dx$$

Corollaire 2

Soit $f: I \rightarrow E$ CPM et $L \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit $[a,b] \subset I$. On a :

$$\int_a^b L(f(t)) dt = L \left(\int_a^b f(t) dt \right)$$

Démo

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

$$L \left(\int_a^b f(t) dt \right) = L \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(L \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right) \right)$$

Car L continue sur E

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n L \left(f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right) \right)$$

Car L linéaire

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (L \circ f) \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \right)$$

$$= \int_a^b L(f(t)) dt$$

□

Corollaire 3 (Inégalité triangulaire)

Soit $f: [a, b] \rightarrow E$ CPM et $\|\cdot\|$ une norme sur E . On a:

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

Démo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right) = \int_a^b f(t) dt$$

$$\begin{array}{l} \lim_n a_n = l \\ \Downarrow \\ \lim_n \|a_n\| = \|l\| \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a+k \frac{b-a}{n}\right) \right\| = \left\| \int_a^b f(t) dt \right\|$$

→ inég-triang

$$\text{Or } \left\| \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a+k \frac{b-a}{n}\right) \right\| \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left\| f\left(a+k \frac{b-a}{n}\right) \right\|$$

Alors par passage à la limite, on a :

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left\| f\left(a+k \frac{b-a}{n}\right) \right\| = \int_a^b \left\| f(t) \right\| dt \quad \square$$

4) Primitives

Def 1

Soient $f, F \in \mathcal{F}(I, E)$.

F est dite une **primitive** de f si et ssi :

$$\begin{cases} F \text{ est dérivable sur } I \\ F' = f \end{cases}$$

Prop 2

Soient $f, g \in \mathcal{D}(I, E)$. On a :

$$1) f' = 0 \Leftrightarrow (\exists C \in E, \forall x \in E, f(x) = C)$$

$$2) f' = g' \Leftrightarrow (\exists C \in E, \forall x \in E, f(x) = g(x) + C)$$

Démo

1) Posons $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$. On a :

$$f' = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n f_i' e_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq n, f_i' = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq n, \exists C_i \in \mathbb{K}, f_i = C_i$$

$$\Leftrightarrow \exists C \in E, \sum_{i=1}^n f_i e_i = C \quad (\text{où } C = \sum_{i=1}^n C_i e_i)$$

$$\Leftrightarrow (\exists C \in E, f = C)$$

2) $f' = g' \Leftrightarrow (f - g)' = 0$

$$\Leftrightarrow \exists C \in E, f - g = C$$

$$\Leftrightarrow \exists C \in E, f = g + C$$



Corollaire 3

Les primitives d'une fonction CPM diffèrent par une constante.

Exemple rapide

Les primitives de la fonction $t \mapsto \begin{pmatrix} \cot t & \text{sh}(t) \\ t^2 & -1 \end{pmatrix}$ sont de la forme :

$$F(t) = \begin{pmatrix} \sin t + C_1 & \text{cht} + C_3 \\ \frac{t^3}{3} + C_2 & -t + C_4 \end{pmatrix}; \text{ où } C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

Prop 4

Soit $f \in C(I, E)$ et $a \in I$.

La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Démo

Via les fonctions composantes de f , qui sont à valeurs dans \mathbb{K} et qui sont continues, par suite possède des primitives ... \square

Corollaire 5

Si $f \in C(I, E)$ et $a \in I$.

Alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est de classe C^1 sur I .

Corollaire 6

Soit $f \in C(I, E)$ et F une primitive de f .

Soient $a, b \in I$. On a:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \quad (\text{noté } [F(t)]_a^b)$$

Démo

Notons $G(x) = \int_a^x f(t) dt$.

F et G sont deux primitives de f .

$$\Rightarrow (\exists c \in E, \forall x \in I, F(x) = G(x) + c)$$

$$x=a \Rightarrow F(a) = c \quad (\text{car } G(a) = 0)$$

$$\text{D'où } (\forall x \in I, F(x) = \int_a^x f(t) dt + F(a))$$

$$\text{et } x=b \Rightarrow F(b) = \int_a^b f(t) dt + F(a)$$

□

Prop 7

1) Soient $f \in C^1(I, E)$ et $a, b \in I$. On a:

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a) \quad (= [f(t)]_a^b)$$

2) $\int_a^b c dt = (b-a)c$; où c constante de E .

5) Changement de variable - Intégration par parties

Prop 1 (Changement de variable)

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} .

$$\text{Soient } \begin{cases} \varphi: I \rightarrow J \text{ de classe } C^1 \\ f: J \rightarrow E \text{ continue} \end{cases}$$

$$\forall \alpha, \beta \in I, \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(t) f(\varphi(t)) dt$$

(On dit qu'on a effectué le changement de variable $x = \psi(t)$)

Démo

Calculez sur celle de sup.

Prop 2 (Intégration par parties)

Soient $f \in C^1(I, E)$ et $g \in C^1(I, F)$.

Soit $B: E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire.

Soient $a, b \in I$, on a :

$$\int_a^b B(f', g) = [B(f, g)]_a^b - \int_a^b B(f, g')$$

Démo

$$\text{On a } (B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g')$$

$$\Rightarrow B(f', g) = (B(f, g))' - B(f, g')$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_a^b B(f', g) &= \int_a^b (B(f, g))' - \int_a^b B(f, g') \\ &= \underbrace{B(f(b), g(b)) - B(f(a), g(a))}_{[B(f, g)]_a^b} = [B(f, g)]_a^b \end{aligned}$$



6) Inégalités des accroissements finis

Prop

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} f \in C^1(I, E) \\ \exists M \geq 0, \forall x \in I, \|f'(x)\| \leq M \end{array} \right.$$

$$\text{Alors } (\forall a, b \in I, \|f(b) - f(a)\| \leq M \cdot |b - a|)$$

Démo

$$\text{On a } f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$$

$$\Rightarrow \|f(b) - f(a)\| = \left\| \int_a^b f'(t) dt \right\|$$

Cas 1 : Si $a \leq b$

$$\|f(b) - f(a)\| = \left\| \int_a^b f'(t) dt \right\|$$

$$\leq \int_a^b \underbrace{\|f'(t)\|}_{\leq M} dt$$

$$\leq \int_a^b M dt$$

$$= M(b - a)$$

$$= M|b - a|$$

Cas 2 : si $b < a$

$$\|f(b) - f(a)\| = \|f(a) - f(b)\|$$

$$= \left\| \int_b^a f'(t) dt \right\|$$

$$\leq \int_b^a \underbrace{\|f'(t)\|}_{\leq M} dt$$

$$\leq \int_b^a M dt$$

$$= M(a-b)$$

$$= M|b-a|$$

□

7) Formules de Taylor

a) Formule de Taylor avec reste intégrale

Prop

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si $f \in C^{n+1}(I, E)$

Alors $\left(\forall a, b \in I, f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right)$

Démo

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, et via une IPP.

b) Inégalité de Taylor - Lagrange

Prop

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\left| \begin{array}{l} f \in C^{n+1}(I, E) \end{array} \right.$$

Si

$$\left| \begin{array}{l} \exists M > 0, \forall t \in I, \|f^{(n+1)}(t)\| \leq M \end{array} \right.$$

$$\text{Alors } \left(\forall a, b \in I, \left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \right)$$

Démo (En bref)

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| = \left\| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right\|$$

Cas 1 : Si $a \leq b$

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| = \left\| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right\|$$

$$\leq \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \underbrace{\|f^{(n+1)}(t)\|}_{\leq M} dt \quad (\text{inég-triang})$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{M}{n!} \int_a^b (b-t)^n dt \\
&= \frac{M}{n!} \left[\frac{-(b-t)^{n+1}}{n+1} \right]_a^b \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{= \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1}} \\
&= \frac{M}{(n+1)!} |a-b|^{n+1} \quad \square
\end{aligned}$$

Case 2 : si $b < a$

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| = \left\| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right\|$$

$$= \left\| \int_b^a \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right\|$$

$$\leq \int_b^a \frac{(t-b)^n}{n!} \cdot \underbrace{\|f^{(n+1)}(t)\|}_{\leq M} dt \quad \text{(inég- triang)}$$

$\left. \begin{array}{l} |b-t| = t-b \\ \text{car } t \geq b \end{array} \right\}$

$$\leq \frac{M}{n!} \int_b^a (t-b)^n dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{M}{n!} \left[\frac{(t-b)^{n+1}}{n+1} \right]_b^a \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{= \frac{(a-b)^{n+1}}{n+1}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{M}{(n+1)!} (a-b)^{n+1}$$

$$= \frac{M}{(n+1)!} |a-b|^{n+1} \quad \square \quad (\text{car } a > b)$$

C) Formule de Taylor-Young

Prop

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si $\left| \begin{array}{l} f \in C^n(I, E) \\ a \in I \end{array} \right.$

$$\text{Alors } f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(x-a)^n$$

Fin