Dérivation

Dérivabilité

Exercice 1 [01354] [correction]
Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes

$$\text{a) } x\mapsto\sqrt{x^2-x^3}\quad\text{b) } x\mapsto(x^2-1)\arccos(x^2)$$

Exercice 2 [00736] [correction]
Sur quelles parties de $\mathbb{R}$, les fonctions suivantes sont-elles continues, dérivables ?

$$\text{a) } x\mapsto x\,|x|\quad\text{b) } x\mapsto\frac{x}{|x|+1}$$

Exercice 3 [00247] [correction]
Sur quelles parties de $\mathbb{R}$, les fonctions suivantes sont-elles continues, dérivables ?

$$\text{a) } f:x\mapsto\begin{cases}x\sin(1/x) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\quad\text{b) } g:x\mapsto\begin{cases}x^2\sin(1/x) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Exercice 4 [01355] [correction]
Après avoir déterminé le domaine d'existence, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\text{a) } x\mapsto\frac{\arctan x}{x^2+1}\quad\text{b) } x\mapsto\frac{1}{(x+1)^2}\quad\text{c) } x\mapsto\frac{\sin x}{(\cos x+2)^4}$$

Exercice 5 [00737] [correction]
Après avoir déterminé le domaine d'existence, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\text{a) } x\mapsto x^x\quad\text{b) } x\mapsto(\mathrm{ch}x)^x\quad\text{c) } x\mapsto\ln|x|$$

Exercice 6 [00249] [correction]
Calculer les dérivées des fonctions suivantes

$$f_1(x)=\arctan\left(\mathrm{e}^x\right),\ f_2(x)=\arctan\left(\mathrm{sh}x\right)\ \text{ et }\ f_3(x)=\arctan\left(\mathrm{th}\frac{x}{2}\right)$$

Qu'en déduire ?

Exercice 7 [01356] [correction]
Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, on considère les fonctions

$$f_\lambda:x\mapsto\frac{x+\lambda}{x^2+1}$$

a) Montrer que les tangentes en 0 aux fonctions f_λ sont parallèles.
b) Observer que les tangentes en 1 sont concourantes.

Exercice 8 [01357] [correction]
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I qui n'en soit pas une extrémité. Si le rapport

$$\frac{1}{2h}\left(f(a+h)-f(a-h)\right)$$

admet une limite finie quand h tend vers 0, celle-ci est appelée dérivée symétrique de f en a.
a) Montrer que, si f est dérivable à droite et à gauche en a, elle admet une dérivée symétrique en a.
b) Que dire de la réciproque ?

Exercice 9 [01358] [correction]
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a\in\mathbb{R}$. Etudier

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$$

Exercice 10 [01359] [correction]
Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable.
On définit une fonction $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=\begin{cases}f(2x) & \text{si } x\in[0,1/2]\\ f(2x-1) & \text{sinon}\end{cases}$$

A quelle condition(s) la fonction g est-elle dérivable ?

Exercice 11 [01360] [correction]
Soit $f:I\to\mathbb{C}$ une fonction dérivable.
Montrer que $|f|:I\to\mathbb{R}$ est dérivable en tout point où f ne s'annule pas et exprimer sa dérivée.

Dérivée d'ordre n

Exercice 12 [01362] [correction]
Calculer la dérivée n-ième de

$$\text{a) } x \mapsto x^2(1+x)^n \quad \text{b) } x \mapsto (x^2+1)\mathrm{e}^x$$

Exercice 13 [01361] [correction]
Calculer la dérivée n-ième de

$$x \mapsto \frac{1}{1-x},\ x \mapsto \frac{1}{1+x} \text{ puis } x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$$

Exercice 14 [00743] [correction]
Calculer la dérivée n-ième de $x \mapsto \cos^3 x$

Exercice 15 [03863] [correction]
Calculons la dérivée n-ième de la fonction réelle $t \mapsto \cos(t)\mathrm{e}^t$.

Exercice 16 [01363] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \sin x$. Montrer que

$$f^{(n)}(x) = 2^n \mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)$$

Exercice 17 [00254] [correction]
Montrer que la dérivée d'ordre n de $x^{n-1}\mathrm{e}^{1/x}$ est

$$(-1)^n x^{-(n+1)} \mathrm{e}^{1/x}$$

Exercice 18 [00252] [correction]
Soit $f : x \mapsto \arctan x$.
a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin(nf(x) + n\pi/2)$$

b) En déduire les racines de $f^{(n)}$ pour $n \geqslant 1$.

Exercice 19 [01364] [correction]
Calculer de deux façons la dérivée n-ième de $x \mapsto x^{2n}$.
En déduire une expression de

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Applications de la dérivation

Exercice 20 [01383] [correction]
Etablir les inégalités suivantes :
a) $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$
b) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

Exercice 21 [01402] [correction]
Soit $p \in \left]0, 1\right]$.
a) Etablir que pour tout $t \geqslant 0$, on a

$$(1+t)^p \leqslant 1 + t^p$$

b) En déduire que pour tout $x, y \geqslant 0$,

$$(x+y)^p \leqslant x^p + y^p$$

Exercice 22 [01366] [correction]
Soit $f : \left[0, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$f(0) = -1 \text{ et } \lim_{+\infty} f = +\infty$$

Montrer que si f s'annule au moins deux fois alors f' aussi.

Exercice 23 [01365] [correction]
Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Exercice 24 [01367] [correction]
Soit $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{\sin x} + x$$

Justifier que f réalise une bijection vers un intervalle à préciser, puis que f^{-1} est continue et dérivable sur cet intervalle.

Exercice 25 [00360] [correction]
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

$$f \circ f = f$$

Théorème de Rolle

Exercice 26 [01370] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f' ne s'annule pas.
Montrer que f ne peut être périodique.

Exercice 27 [01371] [correction]
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $x \in \,]0,1[$ tel que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$$

Exercice 28 [01372] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ s'annulant en $n+1$ points distincts de I.
a) Montrer que la dérivée n-ième de f s'annule au moins une fois sur I.
b) Soit α un réel. Montrer que la dérivée $(n-1)$ -ième de $f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois sur I.
(indice : on pourra introduire une fonction auxiliaire.)

Exercice 29 [01376] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}$, $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable.
Montrer que si

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ et } f(b) = 0$$

alors il existe $c \in \,]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 30 [00256] [correction]
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable et vérifiant $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.
Montrer que la dérivée de f s'annule.

Exercice 31 [01373] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty$$

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 32 [01374] [correction]
Soit $f : [0, +\infty[\,\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\lim_{+\infty} f = f(0)$$

Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 33 [01377] [correction]
Soit $a > 0$ et f une fonction réelle continue sur $[0, a]$ et dérivable sur $]0, a]$.
On suppose

$$f(0) = 0 \text{ et } f(a)f'(a) < 0$$

Montrer qu'il existe $c \in \,]0, a[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 34 [01380] [correction]
Soit $a > 0$ et $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$f(0) = f(a) = 0 \text{ et } f'(0) = 0$$

a) Montrer que la dérivée de $x \mapsto f(x)/x$ s'annule sur $]0, a[$.
b) En déduire qu'il existe un point autre que l'origine en lequel la tangente à f passe par l'origine.

Exercice 35 [01378] [correction]
[Règle de L'Hôpital]

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On suppose que

$$\forall x \in [a, b], g'(x) \neq 0$$

a) Montrer que $g(a) \neq g(b)$.
b) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Exercice 36 [01375] [correction]
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant

$$f(a) = f(b) = 0 \text{ et } f'(a) > 0,\ f'(b) > 0$$

Montrer qu'il existe $c_1, c_2, c_3 \in]a, b[$ tels que $c_1 < c_2 < c_3$ et

$$f'(c_1) = f(c_2) = f'(c_3) = 0$$

Exercice 37 [03436] [correction]
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$f(a) = f'(a) \text{ et } f(b) = f'(b)$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(c) = f''(c)$$

Indice : on pourra introduire une fonction auxiliaire dépendant de $f(x)$, $f'(x)$ et e^x

Théorème des accroissements finis

Exercice 38 [01381] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Montrer que

$$\forall x > 0, \exists c > 0, f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$$

Exercice 39 [01382] [correction]
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, a + 2h]$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$).
Montrer

$$\exists c \in]a, a + 2h[\,,\ f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) = h^2 f''(c)$$

(indice : introduire $\varphi(x) = f(x + h) - f(x)$.)

Exercice 40 [01384] [correction]
A l'aide du théorème des accroissements finis déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} \left((x + 1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right)$$

Exercice 41 [01385] [correction]
Montrer que

$$\forall x > 0,\ \frac{1}{1 + x} < \ln(1 + x) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

En déduire, pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$$

Exercice 42 [01386] [correction]
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.
Montrer que f est lipschitzienne si, et seulement si, sa dérivée est bornée.

Exercice 43 [01341] [correction]
Soit $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose de $f(x) \to \ell$ et $xf'(x) \to \ell'$ quand $x \to 0$.
Que dire de ℓ' ?

Exercice 44 [00727] [correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$.
a) Si f'' est bornée, que dire de $f'(x)$ quand $x \to +\infty$?
b) Le résultat subsiste-t-il sans l'hypothèse du a) ?

Exercice 45 [03886] [correction]
Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite höldérienne d'exposant $\alpha > 0$ s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \leqslant M\,|y - x|^\alpha$$

a) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Montrer que f est höldérienne d'exposant $\alpha = 1$.
b) Démontrer que les fonctions höldériennes d'exposant > 1 sont constantes.
c) On considère la fonction $f : x \mapsto x \ln x$ définie sur $]0, 1]$.
Montrer que la fonction f n'est pas höldérienne d'exposant 1.
d) Vérifier cependant que f est höldérienne d'exposant α pour tout $\alpha \in]0, 1[$.

Classe d'une fonction

Exercice 46 [01387] [correction]
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est lipschitzienne.

Exercice 47 [01388] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et périodique.
Montrer que f est lipschitzienne.

Théorème du prolongement C1

Exercice 48 [01389] [correction]
Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 49 [01390] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} x^{n+1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 50 [01368] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f'(0) = 0$.
Montrer qu'il existe $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = g(x^2)$$

Exercice 51 [01369] [correction]
Soit α un paramètre réel. On désire résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$E : xy' = \alpha y$$

On considère $x \mapsto y(x)$ une solution de E sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{-\star}$.
a) Donner l'expression de $y(x)$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et sur $\mathbb{R}^{-\star}$.
On notera C^+ et C^- les constantes réelles permettant d'exprimer $y(x)$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{-\star}$.
b) A quelles conditions sur les constantes C^+ et C^-, est-il possible de prolonger y par continuité en 0 ?
On distinguera trois cas, selon que $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ ou $\alpha > 0$.
c) Pour $\alpha > 0$, à quelles conditions sur les constantes C^+ et C^- la fonction prolongée y est-elle dérivable en 0 ?
On distinguera trois cas, selon que $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$ ou $\alpha > 1$.
d) Résumer l'étude précédente en donnant la solution générale de E sur $\mathbb{R}$ en fonction de α.

Convexité

Exercice 52 [01391] [correction]
Soient f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications telles que f soit convexe et g soit à la fois convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 53 [01392] [correction]
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue strictement décroissante et convexe.
Etudier la convexité de la fonction $f^{-1} : f(I) \to I$.

Exercice 54 [01393] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe strictement croissante.
Montrer que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Exercice 55 [01394] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et bornée.
Montrer que f est constante.

Exercice 56 [01395] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application convexe et majorée. Montrer que f est constante.
La conclusion subsiste-t-elle pour $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$?

Exercice 57 [01396] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que f est continue.

Exercice 58 [01397] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
a) On suppose $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$. Montrer que f est positive.
b) On suppose que f présente une droite asymptote en $+\infty$. Cela signifie qu'il existe une droite d'équation $y = px + q$ vérifiant

$$f(x) - (px + q) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Etudier la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Exercice 59 [02487] [correction]
Soit

$$f : t \in]-\infty, 1/4[\setminus \{0\} \mapsto \frac{1}{t\sqrt{1-4t}} - \frac{1}{t}$$

a) Montrer que f se prolonge en une fonction de $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1/4[$.
b) Tracer le graphe de f à l'aide d'un logiciel de calcul formel.
c) Etudier la concavité du graphe.

Exercice 60 [03049] [correction]
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.
a) On suppose que, pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Montrer que f est convexe.
b) On suppose qu'il existe un réel M tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)| \leqslant My^2$$

Montrer que f est dérivable.
Indice : Considérer $x \mapsto f(x) \pm Mx^2/2$.

Exercice 61 [03155] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dérivable, concave et vérifiant $f(0) \geqslant 0$. Montrer que f est sous-additive i.e.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$$

Exercice 62 [03357] [correction]
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que si $a \in I$ est un minimum local de f alors a est un minimum global.

Inégalités de convexité

Exercice 63 [01398] [correction]
Observer les inégalités suivantes par un argument de convexité.

a) $\forall x \in [0, \pi/2], \ \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$ b) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geqslant 0, \ x^{n+1} - (n+1)\,x + n \geqslant 0$

Exercice 64 [01399] [correction]
Montrer que $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(\ln x)$ est concave.
En déduire

$$\forall (x, y) \in]1, +\infty[^2, \ \ln \frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{\ln x . \ln y}$$

Exercice 65 [01400] [correction]
Montrer

$$\forall x_1, \ldots, x_n > 0, \ \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Exercice 66 [01401] [correction]
Soient $p, q > 0$ tels que
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$
Montrer que pour tout $a, b > 0$ on a
$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\geqslant ab$$

Exercice 67 [03172] [correction]
Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$ et $t \in]0,1[$. Montrer
$$a^t b^{1-t} \leqslant ta+(1-t)b$$

Exercice 68 [01404] [correction]
[Inégalité de Hölder]
Soient $p, q > 0$ tels que
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$
a) En exploitant la concavité de $x \mapsto \ln x$, établir que pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$, on a
$$\sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b}\leqslant \frac{a}{p}+\frac{b}{q}$$
b) Soient $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^+$, déduire de ce qui précède :
$$\frac{a_1b_1}{\sqrt[p]{a_1^p+a_2^p}\sqrt[q]{b_1^q+b_2^q}}\leqslant \frac{1}{p}\frac{a_1^p}{a_1^p+a_2^p}+\frac{1}{q}\frac{b_1^q}{b_1^q+b_2^q}$$
c) Conclure que
$$a_1b_1+a_2b_2\leqslant \sqrt[p]{a_1^p+a_2^p}\sqrt[q]{b_1^q+b_2^q}$$
d) Plus généralement, établir que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$ on a :
$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n a_i^p}\sqrt[q]{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

Exercice 69 [01403] [correction]
a) Montrer que $x \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$
b) Etablir
$$\forall n\in\mathbb{N}^\star, \forall x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}^{+\star}, 1+\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n}\leqslant\left(\prod_{k=1}^n 1+x_k\right)^{1/n}$$
c) En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star, a_1,a_2,\dots,a_n,b_1,b_2,\dots,b_n\in\mathbb{R}^{+\star}$, l'inégalité :
$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n}+\left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n}\leqslant\left(\prod_{k=1}^n (a_k+b_k)\right)^{1/n}$$

Exercice 70 [02945] [correction]
Soient $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ des réels positifs.
Montrer
$$(x_1\dots x_n)^{1/n}+(y_1\dots y_n)^{1/n}\leqslant((x_1+y_1)\times\dots\times(x_n+y_n))^{1/n}$$

Etude graphique d'une fonction

Exercice 71 [01405] [correction]
Etudier la fonction
$$f : x\mapsto x\sqrt{1-x^2}$$
afin d'en réaliser la représentation graphique.

Exercice 72 [01406] [correction]
Etudier la fonction
$$f : x\mapsto x^2\mathrm{e}^{-x}$$
en vu d'en réaliser la représentation graphique.

Exercice 73 [01407] [correction]
Etudier la fonction
$$f : x\mapsto \frac{2\ln x+3}{x}$$
en vu d'en réaliser la représentation graphique.

Exercice 74 [01408] [correction]
Etudier la fonction
$$f : x \mapsto \frac{x^2 + x}{|x| + 1}$$
en vu d'en réaliser la représentation graphique.

Exercice 75 [01409] [correction]
Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$
Montrer que f admet un point d'inflexion.
Etudier les branches infinies de la courbe représentative de f et en donner l'allure.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$ est définie et continue sur $]-\infty, 1]$.
Par opérations, f est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.
Quand $h \to 0^+$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \sqrt{1-h} \to 1$$

et quand $h \to 0^-$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} \to -1$$

f n'est pas dérivable en 0 mais y admet un nombre dérivée à droite et à gauche.
Quand $h \to 0^-$,

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\sqrt{-h - 2h^2 - h^3}}{h} \to -\infty$$

f n'est pas dérivable en 1, il y a une tangente verticale à son graphe en cet abscisse.
b) $f(x) = (x^2 - 1)\arccos x^2$ est définie et continue sur $[-1, 1]$.
Par opération f est dérivable sur $]-1, 1[$.
Quand $h \to 0^-$,

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = (2+h)\arccos((1+h)^2) \to 0$$

f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.
Par parité, f est aussi dérivable en -1 et $f'(-1) = 0$.

Exercice 2 : [énoncé]
a) $f(x) = x\,|x|$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Par opérations, f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$.
Quand $h \to 0^+$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = h \to 0$$

et quand $h \to 0^-$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = -h \to 0$$

f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
b)$f(x) = \frac{x}{|x|+1}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Par opérations f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$.
Quand $h \to 0$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{|h|+1} \to 1$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

Exercice 3 : [énoncé]
a) f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Par opérations, f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$.
Quand $h \to 0$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \sin\frac{1}{h}$$

n'a pas de limite donc f n'est pas dérivable en 0.
b) g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Par opérations, g est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$.
Quand $h \to 0$,

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = h\sin\frac{1}{h} \to 0$$

donc g est dérivable en 0 et $g(0) = 0$.

Exercice 4 : [énoncé]
a) $x \mapsto \frac{\arctan x}{x^2+1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$\left(\frac{\arctan x}{x^2+1}\right)' = \frac{1 - 2x\arctan x}{(x^2+1)^2}$$

b) $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$,

$$\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)' = \frac{-2}{(x+1)^3}$$

c) $x \mapsto \frac{\sin x}{(\cos x+2)^4}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$\left(\frac{\sin x}{(\cos x+2)^4}\right)' = \frac{\cos x}{(\cos x+2)^4} + \frac{4\sin^2 x}{(\cos x+2)^5} = \frac{4 + 2\cos x - 3\cos^2 x}{(\cos x+2)^5}$$

Exercice 5 : [énoncé]
a) $x \mapsto x^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$,

$$(x^x)' = (\mathrm{e}^{x\ln x})' = (1+\ln x)x^x$$

b) $x \mapsto (\mathrm{ch}x)^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$((\mathrm{ch}x)^x)' = \left(\mathrm{e}^{x\ln \mathrm{ch}x}\right)' = (\ln \mathrm{ch}x + x\mathrm{th}x)(\mathrm{ch}x)^x$$

c) $x \mapsto \ln|x|$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$,

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

Exercice 6 : [énoncé]

$$f_1'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}},\ f_2'(x) = \frac{2\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}} \text{ et } f_3'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$$

On en déduit

$$f_1(x) = \frac{1}{2}f_2(x) + \frac{\pi}{4} = f_3(x) + \frac{\pi}{4}$$

Exercice 7 : [énoncé]
f_λ est dérivable et

$$f_\lambda'(x) = \frac{-x^2-2x\lambda+1}{(x^2+1)^2}$$

a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f_\lambda'(0) = 1$ donc les tangentes en 0 sont parallèles.
b) L'équation de la tangente en 1 à f_λ est

$$y = -\frac{\lambda}{2}(x-1) + \frac{\lambda+1}{2}$$

ou encore

$$y = -\frac{\lambda}{2}(x-2) + \frac{1}{2}$$

Ces tangentes concourent au point d'abscisse 2 et d'ordonnée 1/2.

Exercice 8 : [énoncé]
a) Si $f_d'(a)$ et $f_g'(a)$ existent alors

$$\frac{1}{2h}\left(f(a+h)-f(a-h)\right) = \frac{1}{2h}\left(f(a+h)-f(a)\right) + \frac{1}{-2h}\left(f(a-h)-f(a)\right)$$

et donc

$$\frac{1}{2h}\left(f(a+h)-f(a-h)\right) \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{2}\left(f_d'(a)+f_g'(a)\right)$$

b) Pour $f(x) = \sqrt{|x|}$, la dérivée symétrique en 0 existe alors que la fonction n'y est pas dérivable ni à droite, ni à gauche.

Exercice 9 : [énoncé]
Quand $x \to a$,

$$\frac{xf(a)-af(x)}{x-a} = \frac{(x-a)f(a)+a(f(a)-f(x))}{x-a} \to f(a)-af'(a)$$

Exercice 10 : [énoncé]
g est dérivable sur $[0,1/2[$ et $]1/2,1]$.
g est continue en $1/2$ si, et seulement si, $f(1) = f(0)$.
Si tel est le cas,

$$g_g'(1/2) = 2f'(1) \text{ et } g_d'(1/2) = 2f'(0)$$

Finalement g est dérivable si, et seulement si,

$$f(0) = f(1) \text{ et } f'(0) = f'(1)$$

Exercice 11 : [énoncé]
$|f(t)| = \sqrt{f(t)\overline{f(t)}}$ est dérivable par opérations en tout $t \in I$ tel que $f(t) \neq 0$.

$$|f(t)|' = \frac{(f(t)\overline{f(t)})'}{2\sqrt{f(t)\overline{f(t)}}} = \frac{f'(t)\overline{f(t)}+f(t)\overline{f'(t)}}{2\,|f(t)|} = \frac{\mathrm{Re}(f'(t)\overline{f(t)})}{|f(t)|}$$

Exercice 12 : [énoncé]
On exploite la formule de Leibniz
a)

$$\left(x^2(1+x)^n\right)^{(n)} = \binom{n}{0}x^2\left((1+x)^n\right)^{(n)} + \binom{n}{1}(x^2)'\left((1+x)^n\right)^{(n-1)} + \binom{n}{2}(x^2)''\left((1+x)^n\right.$$

donc

$$(x^2(1+x)^n)^{(n)} = n!x^2 + 2n.n!x(1+x) + n(n-1)\frac{n!}{2}(1+x)^2$$

b)

$$\left((x^2+1)\mathrm{e}^x\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2+1)^{(k)} (\mathrm{e}^x)^{(n-k)} = \left(x^2 + 2nx + n(n-1) + 1\right) \mathrm{e}^x$$

Exercice 13 : [énoncé]
En calculant les dérivées successives

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

on montre par récurrence

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

De même, mais en gérant de plus un signe

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

Enfin

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}$$

donc

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(n)} = \frac{n!}{2(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{2(1+x)^{n+1}}$$

Exercice 14 : [énoncé]
a) On a

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

donc on peut linéariser

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$$

On sait

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2) \text{ et } (\cos 3x)^{(n)} = 3^n \cos(3x + n\pi/2)$$

et on obtient donc

$$(\cos^3 x)^{(n)} = \frac{1}{4}\left(3\cos(x+n\pi/2) + 3^n\cos(3x+n\pi/2)\right)$$

Exercice 15 : [énoncé]
On peut écrire

$$\cos(t)\mathrm{e}^t = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{(1+i)t}\right)$$

et donc

$$(\cos(t)\mathrm{e}^t)^{(n)} = \left(\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{(1+i)t})\right)^{(n)} = \mathrm{Re}\left((1+i)^n \mathrm{e}^{(1+i)t}\right)$$

Or $(1+i)^n = 2^{n/2}\mathrm{e}^{in\pi/4}$ puis

$$(\cos(t)\mathrm{e}^t)^{(n)} = 2^{n/2}\mathrm{e}^t\left(\cos(t+n\pi/4) + i\sin(t+n\pi/4)\right)$$

Exercice 16 : [énoncé]
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 0$.

$$f^{(n+1)}(x) = \left(2^n \mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)\right)'$$

donc

$$f^{(n+1)}(x) = 2^n \left(\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{n\pi}{6}\right) + \cos\left(x+\frac{n\pi}{6}\right)\right)\mathrm{e}^{x\sqrt{3}}$$

puis

$$f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1}\sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{6}\right)\mathrm{e}^{x\sqrt{3}}$$

Récurrence établie.
On peut aussi écrire

$$f(x) = \mathrm{e}^{x\sqrt{3}}\sin x = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(\sqrt{3}+i)x}\right)$$

et exploiter ceci pour calculer directement la dérivée d'ordre n.

Exercice 17 : [énoncé]
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$: ok.
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 0$.

$$\left(x^n \mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n+1)} = \left(x.x^{n-1}\mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n+1)} = x\left(x^{n-1}\mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n+1)} + (n+1)\left(x^{n-1}\mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n)}$$

donc

$$\left(x^n\mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n+1)} = x\left((-1)^n x^{-(n+1)}\mathrm{e}^{1/x}\right)' + (n+1)(-1)^n x^{-(n+1)}\mathrm{e}^{1/x}$$

ce qui donne

$$\left(x^n e^{1/x}\right)^{(n+1)} = (-1)^{n+1} x^{-(n+2)} e^{1/x}$$

Récurrence établie.

Exercice 18 : [énoncé]

a) Par récurrence sur $n \geqslant 1$.

Pour $n = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ et } \cos(f(x))\sin(f(x)+\pi/2) = \cos^2 \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

Supposons la propriété vérifiée au rang $n \geqslant 1$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{n!}{1+x^2}\begin{bmatrix} -\sin(f(x))\sin(nf(x)+n\pi/2) \\ +\cos(nf(x)+n\pi/2)\cos(f(x)) \end{bmatrix}\cos^{n-1}(f(x))$$

Or

$$\frac{1}{1+x^2} = \cos^2(f(x))$$

donc

$$f^{(n+1)}(x) = n!\begin{bmatrix} \sin(f(x))\cos(nf(x)+(n+1)\pi/2) \\ +\sin(nf(x)+(n+1)\pi/2)\cos(f(x)) \end{bmatrix}\cos^{n+1}(f(x))$$

puis

$$f^{(n+1)}(x) = n!\sin((n+1)f(x)+(n+1)\pi/2)\cos^{n+1}(f(x))$$

Récurrence établie.

b) Puisque $\arctan x \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\cos(f(x)) \neq 0$.

Par suite

$$f^{(n)}(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(nf(x)+n\pi/2) = 0$$

et donc

$$f^{(n)}(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2} \text{ avec } k \in \{1,\ldots,n-1\}$$

Au final, les racines de $f^{(n)}$ sont les

$$\cot\frac{k\pi}{n} \text{ avec } k \in \{1,\ldots,n-1\}$$

Exercice 19 : [énoncé]

D'une part

$$\left(x^{2n}\right)^{(n)} = \frac{(2n)!}{n!}x^n$$

D'autre part

$$\left(x^{2n}\right)^{(n)} = (x^n \times x^n)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^n)^{(k)}(x^n)^{(n-k)}$$

et donc

$$\left(x^{2n}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{n!}{k!}x^n = n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 x^n$$

On en déduit

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}$$

Exercice 20 : [énoncé]

a) Soit $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$ définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{x}{1+x}$$

Le tableau des variations de f est alors

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que f est positive.

Soit $g : x \mapsto \ln(1+x) - x/(1+x)$ définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$.

$$g'(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

Le tableau des variations de g est alors

x	-1		0		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que g est positive.

b) Soit $f : x \mapsto e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2$ définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

$$f'''(x) = e^x \geqslant 0$$

On obtient les variations suivantes

x	0		$+\infty$
$f''(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f'(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que f est positive.

Exercice 21 : [énoncé]
a) Etudions la fonction $\delta : t \mapsto 1 + t^p - (1+t)^p$ définie continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
On a $\delta(0) = 0$ et pour $t > 0$,

$$\delta'(t) = p\left(t^{p-1} - (1+t)^{p-1}\right)$$

Puisque $p - 1 \leqslant 0$, $t^{p-1} \geqslant (1+t)^{p-1}$ et donc $\delta'(t) \geqslant 0$. On en déduit que pour tout $t \geqslant 0$, $\delta(t) \geqslant 0$ puis l'inégalité demandée.
b) Pour $x = 0$, l'inégalité est immédiate et pour $x > 0$,

$$(x+y)^p = x^p\left(1 + \frac{y}{x}\right)^p \leqslant x^p\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^p\right) = x^p + y^p$$

Exercice 22 : [énoncé]
Si f' ne s'annule pas alors f est strictement croissante donc injective. Elle ne s'annule alors qu'une fois.
Si f' ne s'annule qu'une fois alors le tableau de signe de f' est de la forme

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	

ou

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$+$	

et le tableau de variation de f est

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	-1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

ou

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f ne peut donc s'annuler qu'une fois.

Exercice 23 : [énoncé]
Soit f solution. En dérivant la relation par rapport à x, on obtient :

$$f'(x+y) = f'(x)$$

La fonction f est donc de dérivée constante et par suite f est affine.
De plus la relation $f(0+0) = f(0) + f(0)$ entraîne $f(0) = 0$ et donc f est linéaire.
Inversement : ok.

Exercice 24 : [énoncé]
f est continue et strictement croissante, $f(0) = 0$ et $f(\pi/2) = 1 + \pi/2$ donc f réalise une bijection de $[0, \pi/2]$ vers $[0, 1+\pi/2]$ et son application réciproque f^{-1} est continue.
f est dérivable sur $]0, \pi/2]$ avec

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} + 1 > 0$$

donc f^{-1} est dérivable sur $f(]0, \pi/2]) =]0, 1+\pi/2]$.
Etude de la dérivabilité de f^{-1} en 0
Quand $h \to 0^+$, en posant $x = f^{-1}(h) \to 0$

$$\frac{f^{-1}(h) - f^{-1}(0)}{h} = \frac{x}{f(x)}$$

Or

$$\frac{x}{f(x)} = \frac{x}{\sqrt{\sin x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x} + o(\sqrt{x}) + x} \sim \sqrt{x} \to 0$$

donc f^{-1} est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Exercice 25 : [énoncé]
Si f est solution alors en dérivant $f \circ f = f$ on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f'(x) \times f'(f(x))$$

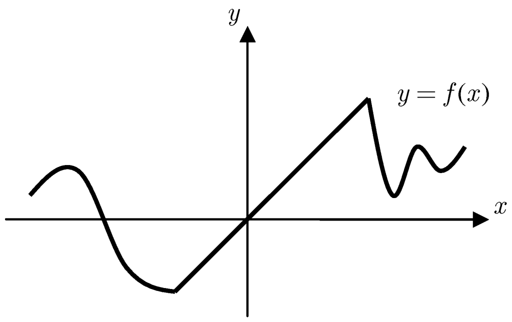
puis en exploitant à nouveau $f \circ f = f$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(f(x)) = f'(f(x))^2$$

Puisque la fonction $f' \circ f$ est continue, on peut affirmer que celle-ci est constante égale à 0 ou 1.
Cas $f' \circ f = 0$
La relation $f'(x) = f'(x) \times f'(f(x))$ donne $f'(x) = 0$ et on en déduit que f est constante.
Cas $f' \circ f = 1$
Nous savons que $I = \mathrm{Im} f = f(\mathbb{R})$ est un intervalle non vide.
Puisque $f'(x) = 1$ pour tout $x \in I$, on peut affirmer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x + C$ pour tout $x \in I$.
Or on a $f(f(x)) = f(x) + C$ (car $f(x) \in I$) et $f(f(x)) = f(x)$ donc $C = 0$. Ainsi

$$\forall x \in I, f(x) = x$$

Pour conclure, il reste à montrer $I = \mathbb{R}$.
Par l'absurde supposons l'intervalle I majoré et posons $m = \sup I$.
Par continuité de f' et de f en m, on a $f(m) = m$ et $f'(m) = 1$ Puisque $f'(m) = 1$, f prend des valeurs strictement supérieures à $f(m) = m$. Ceci contredit la définition de m.
De même, on obtient qu'il est absurde d'affirmer que I est minoré et donc on conclut $I = \mathbb{R}$.
Finalement, si f est solution alors f est constante ou égale à l'identité.
La réciproque est immédiate.
Notons que sans l'hypothèse classe $\mathcal{C}^1$, de nombreuses fonctions peuvent être solutions comme la suivante



Une fonction continue vérifiant $f \circ f = f$

Exercice 26 : [énoncé]
Si f est T-périodique avec $T > 0$ alors en appliquant le théorème de Rolle entre par exemple 0 et T, la dérivée de f s'annule.

Exercice 27 : [énoncé]
Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x$$

φ est dérivable et $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$. Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle pour conclure.

Exercice 28 : [énoncé]
a) Notons $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ les $n+1$ points où nous savons que f s'annule.
Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on peut appliquer le théorème de Rolle à f sur $[a_{i-1}, a_i]$.
En effet f est continue sur $[a_{i-1}, a_i]$, dérivable sur $]a_{i-1}, a_i[$ et $f(a_{i-1}) = 0 = f(a_i)$.
Par le théorème de Rolle, il existe $b_i \in]a_{i-1}, a_i[$ tel que $f'(b_i) = 0$.
Puisque $b_1 < a_1 < b_2 < \cdots < a_{n-1} < b_n$, les $b_1, \ldots, b_n$ sont deux à deux distincts.
Ainsi f' s'annule au moins n fois.
De même, f'' s'annule au moins $n-1$ fois et ainsi de suite jusqu'à $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.
b) Considérons $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$. g s'annule $n+1$ fois donc g' s'annule au moins n fois.
Or $g'(x) = (f'(x) + \alpha f(x))\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ donc les annulations de g' sont les annulations de $f' + \alpha f$.
Puisque $f' + \alpha f$ s'annule n fois, la dérivée $(n-1)$-ième de $f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois.

Exercice 29 : [énoncé]
En appliquant le théorème de Rolle à f entre a et b : il existe $c_1 \in]a, b[$ tel que $f'(c_1) = 0$.
En appliquant le théorème de Rolle à f' entre a et c_1 : il existe $c_2 \in]a, c_1[$ tel que $f''(c_2) = 0$.
...
En appliquant le théorème de Rolle à $f^{(n-1)}$ entre a et c_{n-1} : il existe $c_n \in]a, c_{n-1}[$ tel que $f^{(n)}(c_n) = 0$.
$c = c_n$ résout le problème.

Exercice 30 : [énoncé]
f admet un maximum sur $[a, b]$ qui ne peut être ni en a, ni en b : la dérivée de f s'y annule.

Exercice 31 : [énoncé]
Puisque $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, il existe $a < 0$ et $b > 0$ tels que

$$f(a) > f(0) + 1 \text{ et } f(b) > f(0) + 1$$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre a et 0, d'une part, et 0 et b d'autre part, il existe $\alpha \in]a, 0[$ et $\beta \in]0, b[$ tels que $f(\alpha) = f(0) + 1 = f(\beta)$.
En appliquant le théorème de Rolle entre α et β, il existe $c \in]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 32 : [énoncé]
Si f est constante, la propriété est immédiate.
Sinon, il existe $x_0 \in]0,+\infty[$ tel que $f(x_0) \neq f(0)$.
Posons $y = \frac{1}{2}(f(x_0) + f(0))$ qui est une valeur intermédiaire à $f(0)$ et $f(x_0)$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in]0, x_0[$ tel que $f(a) = y$.
Puisque $\lim\limits_{+\infty} f = f(0)$, y est une valeur intermédiaire à $f(x_0)$ et une valeur $f(x_1)$ avec x_1 suffisamment grand. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $b \in]x_0, x_1]$ tel que $f(b) = y$.
En appliquant le théorème de Rolle sur $[a,b]$, on peut alors conclure.

Exercice 33 : [énoncé]
Quitte à considérer $-f$, on peut supposer $f(a) > 0$ et $f'(a) < 0$.
Puisque $f'(a) < 0$, il existe $b \in]0,a[$ tel que $f(b) > f(a)$.
En appliquant le théorème de valeurs intermédiaires entre 0 et b, il existe $\alpha \in]0,b[$ tel que $f(\alpha) = f(a)$.
En appliquant le théorème de Rolle entre α et a, on obtient $c \in]\alpha,a[\subset]0,a[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 34 : [énoncé]
a) La fonction $g : x \mapsto f(x)/x$ est définie, continue et dérivable sur $]0,a]$.
Quand $x \to 0$,
$$g(x) \to f'(0) = 0$$
Prolongeons g par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.
Puisque g est continue sur $[0,a]$, dérivable sur $]0,a[$ et puisque $g(0) = g(a)$, le théorème de Rolle assure l'annulation de la dérivée de g en un point $c \in]0,a[$.
b)
$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$
donc $g'(c) = 0$ donne $cf'(c) = f(c)$.
La tangente à f en c a pour équation :
$$y = f'(c)(x-c) + f(c) = f'(c)x$$
Elle passe par l'origine.

Exercice 35 : [énoncé]
a) Si $g(a) = g(b)$ alors on peut appliquer le théorème de Rolle et contredire l'hypothèse
$$\forall x \in [a,b]\,, g'(x) \neq 0$$
b) Soit
$$h : x \mapsto g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a))$$
h est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$,
$$h(a) = g(a)f(b) - g(b)f(a) = h(b)$$
En vertu du théorème de Rolle, la dérivée de h s'annule et cela résout le problème posé.

Exercice 36 : [énoncé]
Puisque $f(a) = 0$ et $f'(a) > 0$, il existe $x_1 \in]a,b[$ tel que $f(x_1) > 0$.
En effet, si pour tout $x_1 \in]a,b[$, $f(x_1) \leqslant 0$ alors quand $h \to 0^+$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leqslant 0$ et donc $f'(a) \leqslant 0$.
De même, puisque $f(b) = 0$ et $f'(b) > 0$, il existe $x_2 \in]a,b[$ tel que $f(x_2) < 0$.
Puisque f prend une valeur positive et une valeur négative dans $]a,b[$, par le théorème des valeurs intermédiaires, f s'y annule.
Ainsi il existe $c_2 \in]a,b[$ tel que $f(c_2) = 0$.
En appliquant le théorème de Rolle sur $[a,c_2]$ et $[c_2,b]$, on obtient c_1 et c_3.

Exercice 37 : [énoncé]
Introduisons $\varphi : x \mapsto (f(x) - f'(x))\,\mathrm{e}^x$.
La fonction φ est définie et continue sur $[a,b]$, φ est dérivable sur $]a,b[$ et $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$.
Par le théorème de Rolle, on peut affirmer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$\varphi'(c) = 0$$
Or
$$\varphi'(x) = (f(x) - f''(x))\,\mathrm{e}^x$$
donc $\varphi'(c) = 0$ donne
$$f(c) = f''(c)$$

Exercice 38 : [énoncé]
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$g(x) = f(x) - f(-x)$$
g est dérivable et $g(0) = 0$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0,x[$ tel que
$$g(x) - g(0) = xg'(c)$$
ce qui résout notre problème.

Exercice 39 : [énoncé]
La fonctionφ proposée est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, a+h]$.

$$f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = \varphi(a+h) - \varphi(a)$$

Par le théorème des accroissements finis appliqué à φ entre a et $a+h$, il existe$b \in]a, a+h[$ tel que

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = h\varphi'(b) = h(f'(b+h) - f'(b))$$

Par le théorème des accroissements finis appliqué à f' entre b et $b+h$, il existe $c \in]b, b+h[\in]a, a+2h[$ tel que

$$f'(b+h) - f'(b) = hf''(c) \text{ puis } f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = h^2 f''(c)$$

Exercice 40 : [énoncé]
Par le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{1/x}$ entre x et $x+1$:
il existe $c_x \in]x, x+1[$ tel que

$$(x+1)\mathrm{e}^{1/(x+1)} - x\mathrm{e}^{1/x} = \left(\frac{c_x - 1}{c_x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{c_x}}(x+1-x) = \left(\frac{c_x - 1}{c_x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{c_x}}$$

Quand $x \to +\infty$, $c_x \to +\infty$ car $c_x \geqslant x$.
Par suite

$$\left(\frac{c_x - 1}{c_x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{c_x}} \to 1$$

et donc

$$\lim_{x \to +\infty}\left((x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) = 1$$

Exercice 41 : [énoncé]
On applique le théorème des accroissements finis à $x \mapsto \ln x$ entre x et $x+1$.
Il existe $c \in]x, x+1[$ tel que

$$\ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{c}$$

Or $x < c < x+1$ donne

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$

puis l'encadrement voulu.

$$\sum_{p=n+1}^{kn} \ln(p+1) - \ln p \leqslant \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \leqslant \sum_{p=n+1}^{kn} \ln p - \ln(p-1)$$

donne

$$\ln\frac{kn+1}{n+1} \leqslant \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \leqslant \ln k$$

Par le théorème des gendarmes

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} = \ln k$$

Exercice 42 : [énoncé]
($\Leftarrow$) En vertu de l'inégalité des accroissements finis.
($\Rightarrow$) Si f est k lipschitzienne alors $\forall x, y \in I$ tels que $x \neq y$ on a $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leqslant k$.
A la limite quand $y \to x$ on obtient $|f'(x)| \leqslant k$. Par suite f' est bornée.

Exercice 43 : [énoncé]
Nous allons montrer $\ell' = 0$ en raisonnant par l'absurde.
Supposons $\ell' > 0$.
Il existe $\alpha > 0$ tel qu'au voisinage de 0

$$xf'(x) \geqslant \alpha$$

Pour x et $2x$ dans ce voisinage, on peut écrire en vertu du théorème des accroissements finis

$$f(2x) - f(x) = xf'(c)$$

avec c compris entre x et $2x$.
Puisque $cf'(c) \geqslant \alpha$, on obtient

$$f(2x) - f(x) \geqslant x\frac{\alpha}{c} \geqslant \frac{\alpha}{2}$$

Or quand $x \to 0^+$

$$f(2x) - f(x) \to \ell - \ell = 0$$

C'est absurde.
De même, supposer $\ell' < 0$ est absurde.

Exercice 44 : [énoncé]
a) Posons $M \in \mathbb{R}^{+\star}$ tel que $|f''(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
Soit $\varepsilon > 0$. La suite (x_n) de terme général

$$x_n = n\frac{\varepsilon}{M}$$

diverge vers $+\infty$ et donc

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) \to 0$$

Par suite il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leqslant \frac{\varepsilon^2}{M}$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $c_n \in \left]x_n, x_{n+1}\right[$ tel que

$$|f'(c_n)|\,(x_{n+1} - x_n) \leqslant \frac{\varepsilon^2}{M}$$

ce qui donne

$$|f'(c_n)| \leqslant \varepsilon$$

Puisque f'' est bornée par M, la fonction f' est M-lipschitzienne et donc

$$\forall u \in [x_n, x_{n+1}]\,, |f'(u) - f'(c_n)| \leqslant M\,|u - c_n| \leqslant \varepsilon$$

puis

$$\forall u \in [x_n, x_{n+1}]\,, |f'(u))| \leqslant \varepsilon + |f'(c_n)| \leqslant 2\varepsilon$$

et, puisque ceci vaut pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a en posant $A = x_N$,

$$\forall u \geqslant A, |f'(u)| \leqslant 2\varepsilon$$

On peut conclure que f' converge vers 0 en $+\infty$.
b) Posons

$$f(t) = \frac{\cos(t^2)}{t+1}$$

On vérifie aisément que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et converge en $+\infty$ sans que f' converge en 0.

Exercice 45 : [énoncé]
a) La fonction f' est continue sur le segment $[a, b]$ donc bornée. En introduisant

$$M = \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$$

l'inégalité des accroissements finis donne

$$\forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \leqslant M\,|y - x|$$

b) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ höldérienne d'exposant $\alpha > 1$. Pour $x \in I$

$$\left|\frac{1}{h}\left(f(x+h) - f(x)\right)\right| \leqslant M\,|h|^{\alpha-1} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

La fonction f est donc dérivable et sa dérivée est nulle. C'est donc une fonction constante.
c) Par l'absurde, supposons f höldérienne d'exposant 1. Il existe alors $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall x, y \in \left]0, 1\right]\,, |f(y) - f(x)| \leqslant M\,|y - x|$$

Pour $y = 2x$, on obtient

$$\forall x \in \left]0, 1/2\right]\,, |x \ln x + 2x \ln 2| \leqslant Mx$$

puis

$$\forall x \in \left]0, 1/2\right]\,, |\ln x + 2\ln 2| \leqslant M$$

Quand $x \to 0^+$, on obtient une absurdité.
d) Soit $\alpha \in \left]0, 1\right[$ et $x, y > 0$. Quitte à échanger, on peut supposer $x < y$. On peut écrire

$$y \ln y - x \ln x = (y - x) \ln y + x \ln\left(1 + \frac{y-x}{x}\right)$$

Or, on sait $\ln(1 + u) \leqslant u$ pour tout $u > 0$ donc

$$|y \ln y - x \ln x| \leqslant (y - x)(|\ln y| + 1)$$

puis

$$\frac{|y \ln y - x \ln x|}{|y - x|^\alpha} = (y - x)^{1-\alpha}\,(1 + |\ln y|)$$

Puisque $0 < y - x \leqslant y$ et $1 - \alpha \geqslant 0$, on obtient encore

$$\frac{|y \ln y - x \ln x|}{|y - x|^\alpha} = y^{1-\alpha}\,(1 + |\ln y|)$$

Considérons maintenant la fonction

$$y \mapsto y^{1-\alpha}\,(1 + |\ln y|)$$

Cette fonction est continue sur $\left]0, 1\right]$ et se prolonge par continuité en 0 par la valeur 0 car $1 - \alpha > 0$. Cette fonction est donc bornée et l'on peut introduire $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall y \in \left]0, 1\right]\,, y^{1-\alpha}\,(1 + |\ln y|) \leqslant M$$

On obtient alors

$$\forall x, y \in \left]0,1\right], |f(y) - f(x)| \leqslant M\, |y - x|^\alpha$$

Exercice 46 : [énoncé]
f' est continue sur le segment $[a,b]$ elle y est donc bornée par un certain M.
Par l'inégalité des accroissements finis, f est M lipschitzienne.

Exercice 47 : [énoncé]
La dérivée de f est continue et périodique donc bornée par son max sur un période (qui existe par continuité sur un segment). Par l'inégalité des accroissements finis, il en découle que f est lipschitzienne.

Exercice 48 : [énoncé]
f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
Pour $x > 0$, $f'(x) = 2x\ln x + x$.
Quand $x \to 0^+$, $f'(x) \to 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
De plus, f' est continue en 0 et finalement f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 49 : [énoncé]
Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$, la fonction considérée est continue.
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 0$.
f_{n+1} est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$.
Pour $x \neq 0$, $f_{n+1}'(x) = (n+2)f_n(x)$.
Quand $x \to 0$, $f_{n+1}'(x) \to 0 = (n+2)f_n(0)$ donc f_{n+1} est dérivable en 0 et $f_{n+1}'(0) = 0$.
Ainsi f_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_{n+1}' = (n+2)f_n$.
Par hypothèse de récurrence, f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ et donc f_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
Récurrence établie.

Exercice 50 : [énoncé]
Posons $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = f(\sqrt{t})$$

Par composition g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et

$$\forall x > 0, g'(t) = \frac{f'(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}$$

g est continue et

$$g'(t) = \frac{f'(\sqrt{t}) - f'(0)}{2\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{f''(0)}{2}$$

donc g est dérivable et g' est continue en 0.
Ainsi g est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 51 : [énoncé]
a) E est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de solution générale sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{-\star}$:

$$y(x) = C\,|x|^\alpha$$

Comme y est solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{-\star}$, il existe $C^+, C^- \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x > 0,\ y(x) = C^+\,|x|^\alpha \text{ et } \forall x < 0,\ y(x) = C^-\,|x|^\alpha$$

b) Si $\alpha < 0$ alors

$$y(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C^+ \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } y(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C^- \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

y peut être prolongée par continuité en 0 si, et seulement si, $C^+ = C^- = 0$ et alors $y(0) = 0$.
La solution correspondante est la fonction nulle qui est solution de E.
Si $\alpha = 0$ alors

$$y(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} C^+ \text{ et } y(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} C^-$$

y peut être prolongée par continuité en 0 si, et seulement si, $C^+ = C^-$ et alors $y(0) = C^+$.
La solution correspondante est une fonction constante qui inversement est solution de E.
Si $\alpha > 0$ alors

$$y(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 \text{ et } y(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0$$

y peut être prolongée par continuité en 0 indépendamment de C^+ et C^- en posant $y(0) = 0$.
c) Si $\alpha \in]0,1[$ alors

$$y'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C^+ \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } y'(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C^- \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En vertu du théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$, la fonction y est dérivable en 0 si, et seulement si, $C^+ = C^- = 0$.

La solution correspondante est la fonction nulle qui est solution de E.
Si $\alpha = 1$ alors

$$y'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} C^+ \text{ et } y'(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} -C^-$$

La fonction y est dérivable en 0 si, et seulement si, $C^+ = -C^-$.
La fonction correspondante est alors $x \mapsto C^+x$ sur $\mathbb{R}$ qui est solution de E.
Si $\alpha > 1$ alors

$$y'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 \text{ et } y'(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0$$

La fonction prolongée est dérivable en 0 indépendamment de C^+ et C^-.
Cette fonction est alors solution de E sur $\mathbb{R}$ car dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation différentielle.
d) Si $\alpha < 0$ ou $0 < \alpha < 1$: seule la fonction nulle est seule solution sur $\mathbb{R}$.
Si $\alpha = 0$ alors les fonctions constantes sont les solutions de E sur $\mathbb{R}$.
Si $\alpha = 1$ alors les fonctions linéaires ($x \mapsto Cx$) sont les solutions de E sur $\mathbb{R}$.
Si $\alpha > 1$ alors les solutions de E sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \mapsto \begin{cases} C^+ |x|^\alpha & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ C^- |x|^\alpha & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

avec $C^+, C^- \in \mathbb{R}$

Exercice 52 : [énoncé]
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$,
Puisque f est convexe

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

Puisque g est croissante

$$(g \circ f)(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant g(\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b))$$

Puisque g est convexe

$$(g \circ f)(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda(g \circ f)(a) + (1-\lambda)(g \circ f)(b)$$

Finalement $g \circ f$ est convexe.

Exercice 53 : [énoncé]
f réalise une bijection continue de I vers $f(I)$. f^{-1} a même monotonie que f.
Soient $y, z \in f(I)$ et $\lambda \in [0,1]$, posons $a = f^{-1}(y)$ et $b = f^{-1}(z)$.

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

donne, sachant f^{-1} décroissante :

$$\lambda a + (1-\lambda)b \geqslant f^{-1}(\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b))$$

i.e.

$$\lambda f^{-1}(y) + (1-\lambda)f^{-1}(z) \geqslant f^{-1}(\lambda y + (1-\lambda)z)$$

Ainsi f^{-1} est convexe.

Exercice 54 : [énoncé]
Par la convexité de f, pour tout $x > 1$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geqslant f(1) - f(0)$$

donc

$$f(x) \geqslant (f(1) - f(0))\,x + f(0) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Exercice 55 : [énoncé]
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Pour tout $x > b$ on a $\tau(a,b) \leqslant \tau(a,x)$ donc

$$f(x) \geqslant f(a) + (x-a)\tau(a,b)$$

Si $\tau(a,b) > 0$ alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ce qui est exclu. Par suite $\tau(a,b) \leqslant 0$.
Pour tout $x < a$ on a $\tau(x,a) \leqslant \tau(a,b)$ donc

$$f(x) \geqslant f(a) + (x-a)\tau(a,b)$$

Si $\tau(a,b) < 0$ alors $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ ce qui est exclu. Par suite $\tau(a,b) \geqslant 0$.
Finalement $\tau(a,b) = 0$ et donc $f(a) = f(b)$.

Exercice 56 : [énoncé]
Soit $a < b \in \mathbb{R}$. Par l'absurde supposons $f(a) \neq f(b)$.
Si $f(b) > f(a)$ alors pour tout $x \geqslant b$, $\tau(a,x) \geqslant \tau(a,b)$ donne

$$f(x) \geqslant (x-a)\tau(a,b) + f(a)$$

avec $\tau(a,b) > 0$.
Cette minoration donne $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
Si $f(b) < f(a)$ alors pour tout $x \leqslant a$, $\tau(x,a) \leqslant \tau(a,b)$ donne

$$f(a) - (a-x)\tau(a,b) \leqslant f(x)$$

avec $\tau(a,b) < 0$.
Cette minoration donne $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$.
Dans les deux cas, f n'est pas majorée. Absurde.

Exercice 57 : [énoncé]
Etudions la continuité en $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < x_0 < b$.
Quand $x \to x_0^+$:
$x_0 < x < b$ donc $\tau(x_0, x) \leqslant \tau(x_0, b)$ puis

$$f(x) \leqslant f(x_0) + (x - x_0)\tau(x_0, b)$$

et $a < x_0 < x$ donc $\tau(a, x_0) \leqslant \tau(x_0, x)$ puis

$$f(x_0) + (x - x_0)\tau(a, x_0) \leqslant f(x)$$

Par le théorème des gendarmes

$$f(x) \to f(x_0)$$

Même étude pour $x \to x_0^-$ puis la conclusion.

Exercice 58 : [énoncé]
a) Soient $a < b$. Pour tout $x > b$, on a $\tau(a,x) \geqslant \tau(a,b)$. A la limite quand $x \to +\infty$, $0 \geqslant \tau(a,b)$.
Par suite f est décroissante et puisque $f \underset{+\infty}{\to} 0$, on peut conclure $f \geqslant 0$.
b) Posons $y = px + q$ l'équation de l'asymptote engagée et considérons $g : x \mapsto f(x) - (px+q)$.
La fonction g est convexe et g tend vers 0 en $+\infty$. Par suite g est positive et f est au dessus de son asymptote.

Exercice 59 : [énoncé]
a) $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-4t}} - 1$ est développable en série entière sur $]-1/4, 1/4[$ et le coefficient constant de son développement est nul. Cela permet de prolonger f en une fonction développable en série entière sur $]-1/4, 1/4[$ et donc $\mathcal{C}^\infty$.

b) On définit la fonction
```
f:=t->1/t/sqrt(1-4*t)-1/t;
```
On obtient le graphe
```
plot(f(t), t=-1..1/4);
```
c) Le dénominateur de la dérivée seconde de f est obtenu par
```
denom(normal(D(D(f))(t)));
```
Son signe est immédiat, c'est celui de t.
Le numérateur de la dérivée seconde de f est obtenu par
```
numer(normal(D(D(f))(t)));
```
On définit la fonction correspondante
```
n:=unapply(numer(normal(D(D(f))(t))), t);
```
Sa dérivée s'annule en 0 et le signe de sa dérivée seconde est facile. On en déduit les variations puis le signe du numérateur qui est celui de t. Au final $f''(t) \geqslant 0$ donc le graphe de f est convexe.

Exercice 60 : [énoncé]
a) Soie,t $a, b \in I$ et

$$A = \{\lambda \in [0,1]\,, f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)\}$$

On a $0, 1 \in A$ et par l'hypothèse de travail, on montre

$$\lambda, \mu \in A \Rightarrow (\lambda + \mu)/2 \in A$$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, 2^n\}\,, k/2^n \in A$$

Enfin pour tout $\lambda \in [0,1]$, pour $k_n = \lfloor 2^n\lambda \rfloor$, on a $\lambda_n = k_n/2^n \to \lambda$ et

$$f(\lambda_n a + (1-\lambda_n)b) \leqslant \lambda_n f(a) + (1-\lambda_n)f(b)$$

donne à la limite

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

Ainsi la fonction f est convexe.
b) Par ce qui précède, on montre que la fonction $g : x \mapsto f(x) - Mx^2/2$ est convexe.
On en déduit qu'en tout $x \in I$, g est dérivable à droite et à gauche et on a

$$g'_g(x) \leqslant g'_d(x)$$

Or la fonction $x \mapsto Mx^2/2$ est dérivable donc, par opérations, f est dérivable à droite et à gauche et on vérifie

$$f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$$

De même, on montre que la fonction $h : x \mapsto f(x) + Mx^2/2$ est concave et on en déduit que pour tout $x \in I$,

$$f_g'(x) \geqslant f_d'(x)$$

Finalement $f_g'(x) = f_d'(x)$ et donc f est dérivable.

Exercice 61 : [énoncé]
Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Posons $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(y) = f(x+y) - f(x) - f(y)$$

La fonction φ est dérivable et

$$\varphi'(y) = f'(x+y) - f'(y)$$

Puisque f est concave, sa dérivée f' est décroissante et donc

$$f'(x+y) \leqslant f'(y)$$

On en déduit que φ est décroissante et puisque $\varphi(0) \leqslant 0$, la fonction φ est négative ce qui fournit l'inégalité demandé

Exercice 62 : [énoncé]
Soit $b \in I$.
Cas $b > a$.
Puisque a est minimum local de f, il existe $a < c < b$ tel que

$$f(c) \geqslant f(a)$$

La fonction taux de variation en a étant croissante (car f convexe), on a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geqslant \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \geqslant 0$$

et donc $f(b) \geqslant f(a)$
Le cas $b < a$ est analogue avec considération des signes de $b - a$ et $c - a$.

Exercice 63 : [énoncé]
a) La fonction $x \mapsto \sin x$ est concave sur $[0, \pi/2]$, la droite d'équation $y = x$ est sa tangente en 0 et la droite d'équation $y = 2x/\pi$
supporte la corde joignant les points d'abscisses 0 et $\pi/2$.
Le graphe d'une fonction concave est en dessous de ses tangentes et au dessus de ses cordes et cela fournit l'inégalité.
b) La fonction $x \mapsto x^{n+1}$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$ et sa tangente en 1 a pour équation

$$y = (n+1)x - n$$

Le graphe d'une fonction convexe est au dessus de chacune de ses tangentes et cela fournit l'inégalité.

Exercice 64 : [énoncé]
f est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln x} \text{ et } f''(x) = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2} \leqslant 0$$

f est concave.
Puisque f est concave :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

i.e.

$$\ln\left(\ln \frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{\ln(\ln x) + \ln(\ln y)}{2} = \ln \sqrt{\ln x \ln y}$$

La fonction exp étant croissante :

$$\ln \frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{\ln x \ln y}$$

Exercice 65 : [énoncé]
La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}^{+\star}$ donc

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}$$

d'où

$$\frac{n}{x_1 + \dots + x_n} \leqslant \frac{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n}$$

puis l'inégalité voulue.

Exercice 66 : [énoncé]
La fonction $x \mapsto \ln x$ est concave. En appliquant l'inégalité de concavité entre a^p et b^q on obtient
$$\ln(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q) \geqslant \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q$$
puis l'inégalité voulue.

Exercice 67 : [énoncé]
La propriété est immédiate pour $a = 0$ ou $b = 0$.
Supposons désormais $a, b > 0$.
Par concavité de la fonction logarithme, on peut affirmer
$$\ln(ta + (1-t)b) \geqslant t\ln a + (1-t)\ln b$$
et donc
$$\ln(a^t b^{1-t}) \leqslant \ln(ta + (1-t)b)$$
puis l'inégalité proposée en composant avec la fonction exponentielle qui est croissante.

Exercice 68 : [énoncé]
a) Par la concavité de $x \mapsto \ln x$, on a pour tout $a, b > 0$ et tout $\lambda \in [0,1]$ l'inégalité :
$$\lambda \ln a + (1-\lambda)\ln b \leqslant \ln(\lambda a + (1-\lambda)b)$$
Appliquée à $\lambda = 1/p$, elle donne
$$\ln \sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \leqslant \ln\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right)$$
puis l'inégalité voulue. Enfin celle-ci reste vraie si $a = 0$ ou $b = 0$.
b) Il suffit d'appliquer l'inégalité précédente à
$$a = \frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p} \text{ et } b = \frac{b_1^q}{b_1^q + b_2^q}$$
c) De même on a aussi
$$\frac{a_2 b_2}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p}\sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{a_2^p}{a_1^p + a_2^p} + \frac{1}{q}\frac{b_2^q}{b_1^q + b_2^q}$$
donc en sommant les inégalités obtenues puis en simplifiant on obtient celle voulue.
d) En reprenant l'inégalité du a) avec
$$a = \frac{a_j^p}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p} \text{ et } b = \frac{b_j^q}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q}$$
puis en sommant les inégalités obtenues, on obtient celle voulue.

Exercice 69 : [énoncé]
a) $f : x \mapsto \ln(1 + \mathrm{e}^x)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = 1 - \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \text{ et } f''(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \geqslant 0$$
f est donc convexe.
b)
$$f\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(a_1) + \cdots + f(a_n)}{n}$$
donne
$$\ln\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}}\right) \leqslant \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^n 1 + \mathrm{e}^{a_k}\right)$$
puis
$$1 + \mathrm{e}^{\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n 1 + \mathrm{e}^{a_k}\right)^{1/n}$$
qui donne l'inégalité voulue en partant de $a_k = \ln x_k$.
c) En factorisant
$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n}\left(1 + \left(\prod_{k=1}^n \frac{b_k}{a_k}\right)^{1/n}\right)$$
puis en vertu de ce qui précède
$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n}\left(\prod_{k=1}^n 1 + \frac{b_k}{a_k}\right)^{1/n}$$
puis
$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k)\right)^{1/n}$$

Exercice 70 : [énoncé]
Si l'un des x_i ou des y_i est nul, la relation est immédiate. On suppose désormais $x_i, y_i > 0$.
En divisant par $(x_1 \dots x_n)^{1/n}$, la propriété demandée équivaut à
$1 + (\alpha_1 \dots \alpha_n)^{1/n} \leqslant ((1+\alpha_1)\dots(1+\alpha_n))^{1/n}$ pour tout $\alpha_i > 0$. Etablissons cette identité.
Considérons la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + \mathrm{e}^x)$.
f est dérivable et $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = 1 - \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. La fonction f' est croissante donc f est convexe.
Par l'inégalité de Jensen :

$$\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, f\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\left(f(a_1) + \dots + f(a_n)\right)$$

Pour $a_i = \ln \alpha_i$, on obtient

$$\ln\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}(\ln\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}\right) \leqslant \frac{1}{n}\left(\ln(1+\alpha_1) + \dots + \ln(1+\alpha_n)\right)$$

puis

$$\ln\left(1 + (\alpha_1 \cdots \alpha_n)^{1/n}\right) \leqslant \ln\left((1+\alpha_1)\dots(1+\alpha_n)\right)^{1/n}$$

et par la croissance de la fonction exponentielle, on obtient

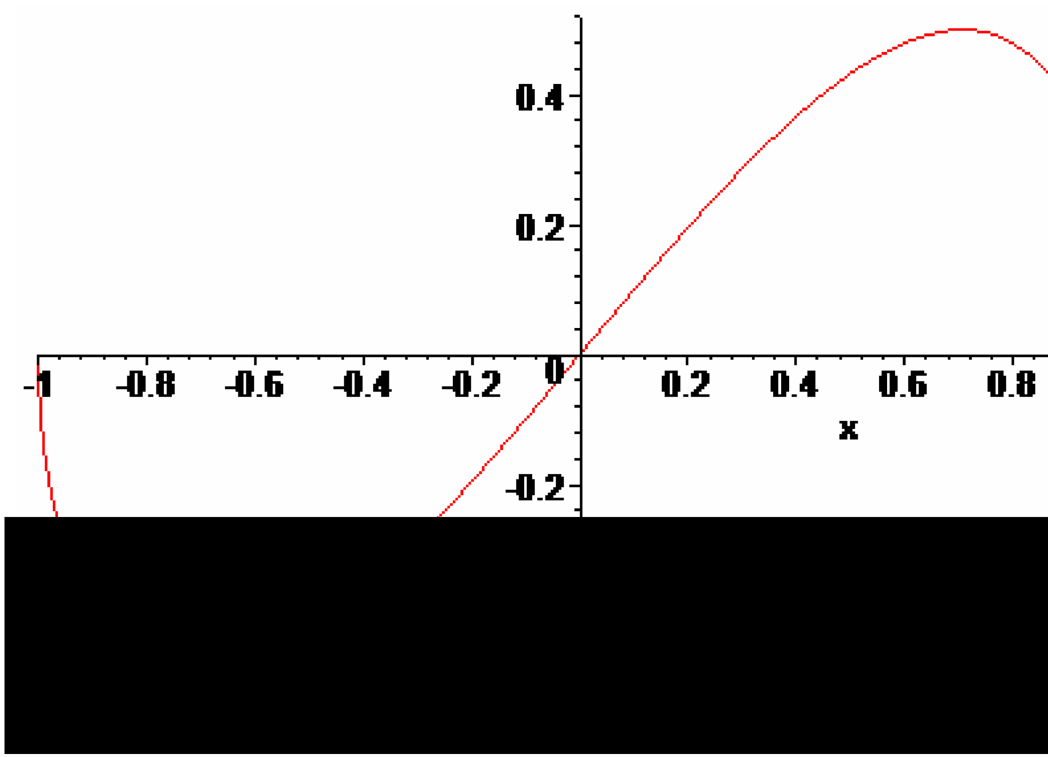
$$1 + (\alpha_1 \dots \alpha_n)^{1/n} \leqslant ((1+\alpha_1)\dots(1+\alpha_n))^{1/n}$$

Exercice 71 : [énoncé]
f est définie sur $[-1, 1]$ et impaire, étude limitée à $[0, 1]$.
f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1[$,

$$f'(x) = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ et } f''(x) = \frac{x(2x^2 - 3)}{(1 - x^2)^{3/2}}$$

f présente une inflexion en 0, tangente $y = x$.
f présente un maximum en $x = 1/\sqrt{2}$ de valeur $1/2$.
$f(1) = 0$ et $f'(x) \xrightarrow[x \to 1]{} +\infty$, il y a une tangente verticale en 1.

```
plot(x*sqrt(1-x^2), x=-1..1);
```



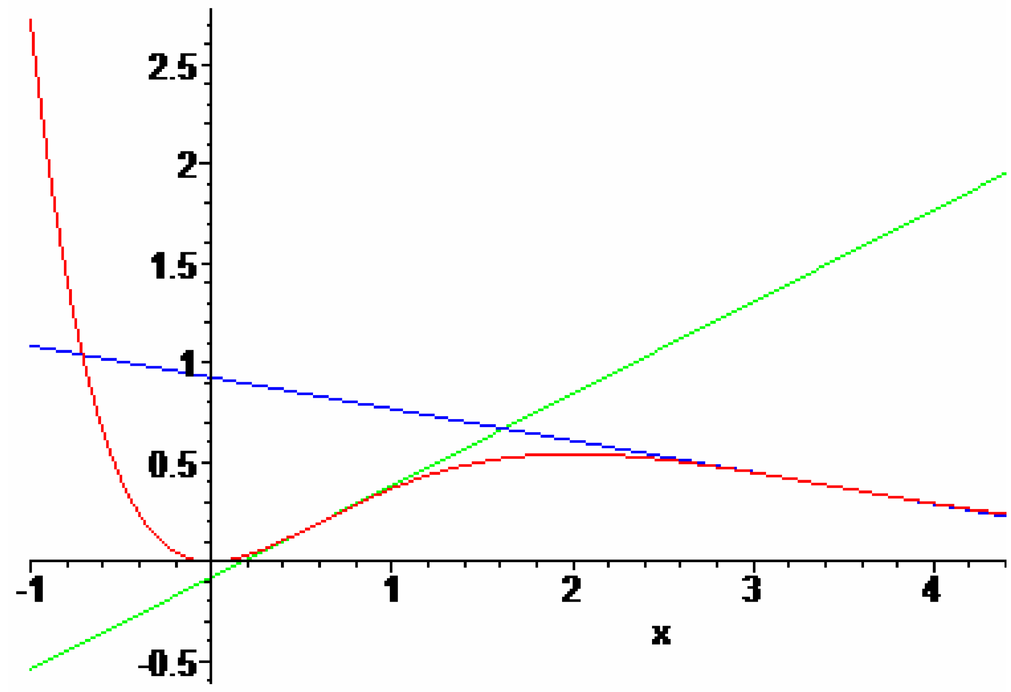
La fonction $x \mapsto x\sqrt{1 - x^2}$

Exercice 72 : [énoncé]
f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = x(2 - x)\mathrm{e}^{-x} \text{ et } f''(x) = (x^2 - 4x + 2)\mathrm{e}^{-x}$$

f présente un minimum absolu en 0 de valeur 0 et un maximum local en 2 de valeur $4/\mathrm{e}^2$.
f présente des points d'inflexion en $2 + \sqrt{2}$ et $2 - \sqrt{2}$.
f présente une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.
f présente une branche parabolique verticale en $-\infty$.

```
f:=x->x^2*exp(-x):
a:=2+sqrt(2):b:=2-sqrt(2):
plot([f(x), D(f)(a)*(x-a)+f(a), D(f)(b)*(x-b)+f(b)], x=-1..5,
color=[red, blue, green]);
```



La fonction $x \mapsto x^2 \mathrm{e}^{-x}$

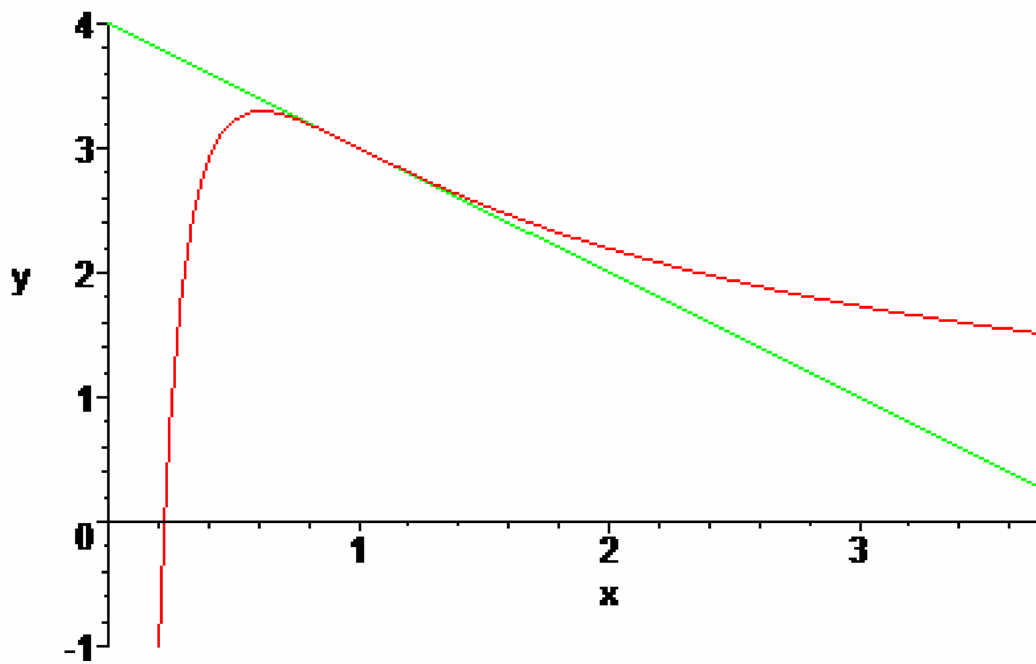
Exercice 73 : [énoncé]
f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

$$f'(x) = \frac{-1 - 2\ln x}{x^2} \text{ et } f''(x) = \frac{4\ln x}{x^3}$$

x	0		$1/\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2\sqrt{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

En 0 : (Oy) est asymptote.
En $+\infty$: (Ox) est asymptote.
En 1 : f'' s'annule avec changement de signe, point d'inflexion.
L'équation de la tangente en ce point est $y = -(x-1) + 3$.

```
plot([(2*ln(x)+3)/x, -(x-1)+3], x=0..4, y=-1..4);
```



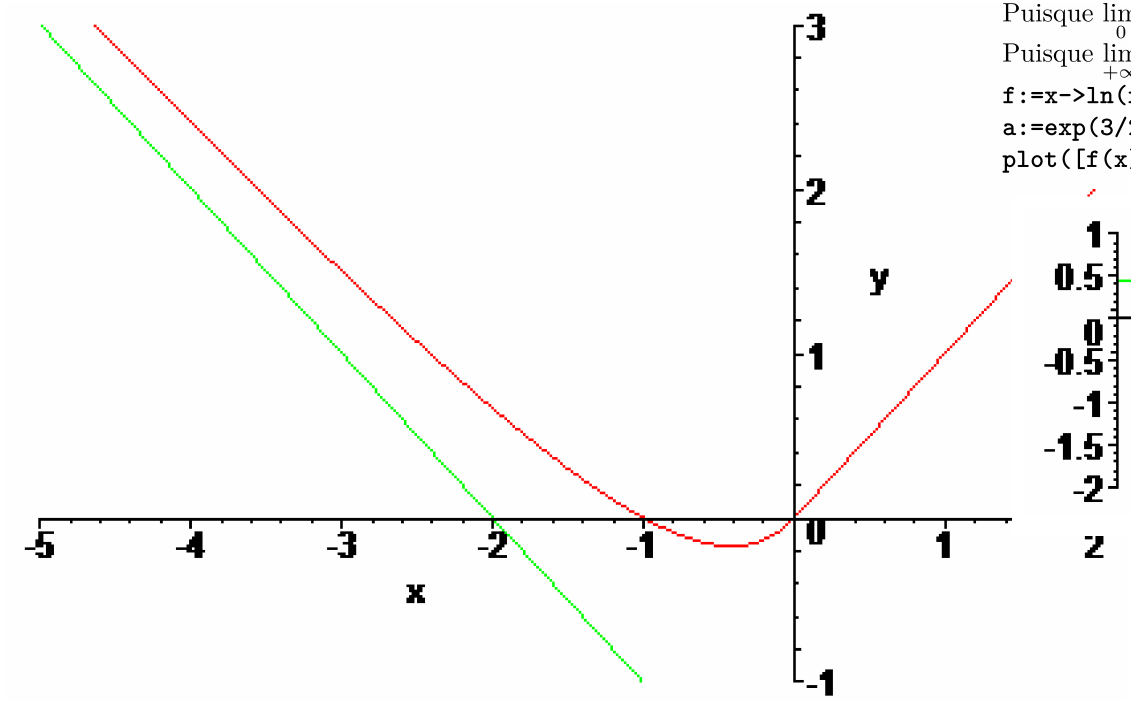
La fonction $x \mapsto \dfrac{2\ln x + 3}{x}$

Exercice 74 : [énoncé]
f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable (par opérations) sur $\mathbb{R}^\star$.
Par limite de taux de variation on constate que f est aussi dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$.
Sur $\mathbb{R}^+$, $f(x) = x$ ce qui achève l'étude sur $\mathbb{R}^+$.
Sur $\mathbb{R}^-$,

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{1 - x}$$

présente un minimum en $1 - \sqrt{2}$ de valeur $2\sqrt{2} - 3$ et f présente une asymptote d'équation $y = -x - 2$, courbe au dessus.

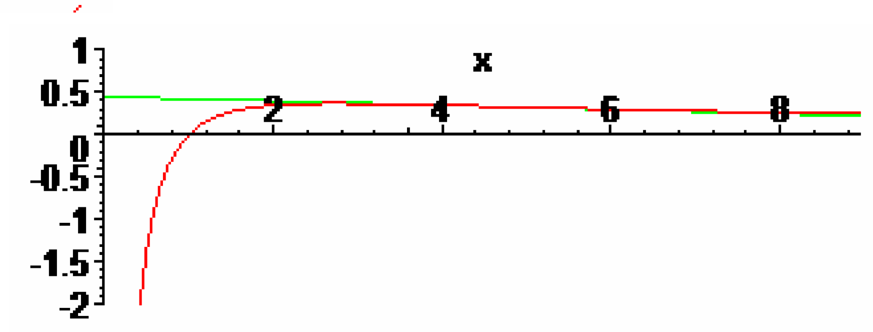
```
plot([(x^2+x)/(abs(x)+1), -x-2], x=-5..2, y=-1..3);
```



La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+x}{|x|+1}$

La fonction f présente un point d'inflexion en $e^{3/2}$.
Puisque $\lim_0 f = -\infty$, il y a une asymptote d'équation $x = 0$.
Puisque $\lim_{+\infty} f = 0$, il y a une asymptote d'équation $y = 0$.

```
f:=x->ln(x)/x:
a:=exp(3/2):
plot([f(x), D(f)(a)*(x-a)+f(a)], x=0..2*a, y=-2..1);
```



La fonction $x \mapsto (\ln x)/x$

Exercice 75 : [énoncé]
f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ses dérivées premières et secondes sont

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2},\ f''(x) = -\frac{1}{x^3} - 2\frac{1-\ln x}{x^3} = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

On en déduit les variations suivantes

x	0		e		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

x		$e^{3/2}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$